Contrôle optimal d'un système stochastique d'équations différentielles linéaires

Issa KABORE[1], Albert OUEDRAOGO[1], Oumar TRAORE[1]

Résumé

Cet article étudie le problème de contrôle d'un système stochastique d'équations différentielles. On se propose de trouver un contrôle optimal tel que la probabilité que l'extrémité droite de la trajectoire du mouvement stochastique associé à ce système atteigne une région X de l'espace R^n.
La fonction coût est $J(u) = P(x(T) \in X)$
où $P(x(T) \in X)$ désigne la probabilité pour que l'extrémité droite $x(T)$ de la trajectoire stochastique arrive dans X.
Ici, $x = (x_1,...,x_n)$ est une fonction vectorielle dont chaque composante est une variable aléatoire suivant la loi normale, T est un nombre réel strictement positif.

Mots-clés : Contrôle optimal, système stochastique, matrice fondamentale.

Optimal control for a linear stochastic differential equation

Abstract

In this paper, we study an optimal control problem for a stochastic system.
Our aim is to find an optimal control such that the right extremity $x(T)$ of the associated stochastic movement trajectory reaches some area X of R^n.
The functional J defined by: $J(u) = P(x(T) \in X)$ is the criteria where $P(x(T) \in X)$ is the probability for the right extremity $x(T)$ of the stochastic movement to reach the area X.
Here, $x = (x_1,...,x_n)$ is a vectorial function. The components of x are random variables belonging the normal law, T is a positive real.

Keywords: optimal control, stochastic control, fundamental matrix.

[1] Département de Mathématiques, UFR-SEA, Université de Ouagadougou, 03 BP 7021 Burkina Faso. traore.oumar@univ-ouaga.bf

Position du problème

Modèle mathématique étudié

Considérons le système d'équations différentielles ci-dessous :

$$x(t) = A(t)\,x(t) + B(t)u(t) + C(t)Y(t) + f(t) \qquad (E_q)$$

qui gouverne le mouvement d'un objet x. Le vecteur $x = (x_1,\ldots,x_n)$ dont les composantes sont des variables aléatoires suivant la loi normale, est le vecteur d'état de phase, $u = (u_1,\ldots,u_r)$ est le vecteur de contrôle et $Y= (y_1,\ldots,y_m)$ est un vecteur dont les composantes $y_1(t),\ldots,y_m(t)$ sont des processus probabilistes continues pour $t \in [O,T]$ où T désigne un nombre strictement positif fixé.

Les matrices A, B, C de types respectifs (n,n), (n,r), (n,m) ainsi que la fonction vectorielle, f à valeurs dans R^n sont continues sur $[O,T]$.

Espérance mathématique et variance de la solution $x(t)$ du système (E_q)

Désignons par $Z(t)$ (matrice d'ordre n) la matrice fondamentale du système homogène :

$$\dot{x}(t) = A(t)x$$

La solution x(t) de l'équation (E_q) vérifiant la condition initiale $x(0) = x^\circ$.

s'écrit sous la forme :

$$x(t) = Z(t)x^\circ + \int_0^t Z(t)^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau) + f(\tau) + C(\tau)Y(\tau)]d\tau$$

En effet :

Posons $x = Z(t)z$ (1)

Alors $z(0) = x^\circ$ et $\dot{x} = \dot{Z}(t)z + Z(t)\dot{z}$ (2)

(2) s'obtient après dérivation relativement à t des deux membres de (1).

Remplaçant dans (E_q) x et $\dot{x}$ par leurs valeurs données en (1) et (2) ; il vient l'égalité :

$$\dot{Z}(t)z + Z(t)\dot{z} = A(t)Z(t)z + B(t)u + C(t)Y + f(t) \qquad (3)$$

D'autre part

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) \Rightarrow \dot{Z}(t)z = A(t)Z(t)z$$

Par suite (3) donne l'égalité

(4) $Z(t)\dot{z} = B(t)u + C(t)Y + f(t)$, Z(t) étant inversible, on déduit de (4)

(5) $\dot{z} = Z^{-1}(t)B(t)u + Z^{-1}(t)C(t)Y + Z^{-1}(t)f(t)$

Par intégration des deux membres de (5) on obtient la relation :

(6) $z(t) - z(0) = \int_0^t Z^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)Y(\tau) + f(\tau)]d\tau$

Multipliant les deux membres de (6) par Z(t) et remplaçant z(0) par x°, on trouve :

$$(7)\quad Z(t)z(t)=Z(t)x^{\circ}+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau)+C(\tau)Y(\tau)+f(\tau)]d\tau$$

De la relation (7) on déduit l'espérance mathématique de x(t), soit :

$$E(x(t))=Z(t)E(x^{\circ})+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)[C(\tau)E(Y(\tau))+f(\tau)]d\tau+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (8)$$

Notons $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ les composantes du vecteur $E(x(t))$

Pour $s = 1,\ldots,n,$ on peut écrire $a_s(t)$ sous la forme :

$$a_s(t)=a_s^0(t)+\int_0^t\sum_{j=1}^{r}\alpha_{sj}(t,\tau)u_j(\tau)d\tau \qquad (9)$$

avec

$a_s^{(0)}(t)$, s^ième composante du vecteur ci-dessous :

$$Z(t)E(x_0)+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)[C(\tau)E(Y(\tau))+f(\tau)]d\tau$$

$\alpha_{sj}(t,\tau)$ élément (de la s^ième ligne et de la j^e colonne) de la matrice $Z(t)Z^{-1}(\tau)B(\tau)$.

Si nous désignons par $D_s^2(t)$ la variance des composantes $x_s(t)$ de x on a :

$$D_s^2(t)=E[x_s(t)-a_s(t)]^2,\ s = 1, 2, \ldots, n.$$

Formulation du problème

Espace de contrôles .

a) Désignons par Γ l'ensemble des fonctions vectorielles $g = (g_1,\ldots, g_r)$ définies sur $[0,T]$ à valeurs dans R^r, chaque g_j, $j = 1, 2,\ldots, r$ est continue par morceaux sur $[0,T]$, ses points de discontinuité sont de première espèce et sont en nombre fini.

b) Métrique sur Γ

Γ est un espace vectoriel, munissons le de la norme ci-dessous : .

Soit $g=(g_1,\ldots g_r)$ définies pp sur $[0,T]$ à valeurs dans IR^r.

Considérons la fonction g_j, $j=1,\ldots r$ et notons t_i^j les points de discontinuités de premières espèces de g_j : $0<t_1^j<\ldots<t_n^j<T$.

On pose $\overline{g}^0{}_j(t)=\begin{cases} g_j(t), si \quad t\in]0,t_1^j[\\ \lim\limits_{t\to0^+} g_j(t), si \quad t=0 \\ \lim\limits_{t\to t_1^j-} g_j(t), si \quad t=t_1^j \end{cases}$; $\overline{g}^n{}_j(t)=\begin{cases} g_j(t), si \quad t\in]t_n^j,T[\\ \lim\limits_{t\to t_n^j+} g_j(t), si \quad t=t_n^j \\ \lim\limits_{t\to T-} g_j(t), si \quad t=T \end{cases}$;

et

$$\overline{g}^{i}_{j}(t)=\begin{cases} g_j(t), si\ t\in\ ]t_i^j, t_{i+1}^j[\\ \lim\limits_{t\to t_i^j+} g_j(t), si \quad t=t_i^j \\ \lim\limits_{t\to t_{i+1}^j-} g_j(t), si \quad t=t_{i+1}^j \end{cases} \quad (10)$$

Alors pour $i=0,...,n$; la fonction $\overline{g}_i^j$ est continue sur $[t_i^j; t_{i+1}^j]$

$$\text{On pose maintenant } \|g\| = \underset{1\le j\le r}{Max}\left(\underset{0\le i\le n}{Max}\ \underset{t\in\left[t_i^j;t_{i+1}^j\right]}{Sup} \left|\overline{g}^{i}_{j}(t)\right| \right). \quad (11)$$

On obtient que $\| \ \|$ est une norme sur Γ.

Le sous ensemble U de Γ formé des éléments $(g_1,...,g_r) \in \Gamma$ tel que $\|g\| \le 1$ constitue l'ensemble des contrôles admissibles.

Fonction coût

Les contrôles u(t) agissant sur le système physique considéré visent à ce que la variable aléatoire x, issue de la valeur initiale x° donnée au temps t = 0, arrive au temps t = T dans le sous-ensemble χ de R^n, défini par :

$$\chi = \left\{ (x_1,...,x_n) \in R^n / |x_1| \le l_1, ..., |x_{n_1}| \le l_{n_1}, x_{n_{1+1}} \in R, ..., x_n \in \mathrm{R} \right\}$$

n_1 fixé, $1 \le n_1 \le n$, $l_j > 0$ pour $j = 1,..., n_1$; et si $n_1 < n$,

on a $\chi_{n1+p} \in$ R pour $1 \le p \le n - n_1$.

La fonction coût $J(u) = p(x(T) \in \chi)$, désigne la probabilité pour que x(T) extrémité droite de la trajectoire stochastique du système arrive dans χ.

Si nous supposons en outre que les variables aléatoires $x_1(T),..., x_n(T)$ sont indépendantes alors la fonctionnelle $J(u)$ peut s'écrire :

$$J(u) = p(x(T) \in \chi) = p\left((x_1(T),...,x_{n_1}(T), x_{n_1+1}(T),....,x_n(T)) \in \chi \right)$$

$$= p\left(|x_1(T)| \le l_1, \right) \mathrm{x...x}\ p\left(|x_{n_1}(T)| \le l_{n_1}\right)$$

puisque $p(\chi_{n1+k} \in R) = 1$ pour $1 \le k \le n - n_1$

Alors $\quad J(u) = J_1(u) \mathrm{x...x}\ J_{n_1}(u)$

Avec

$$(12) \quad \begin{cases} J_j(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, D_j(T)} \displaystyle\int_{-l_j}^{+l_j} \exp\left(-\dfrac{(x_j - a_j(T))^2}{2D_j^2(T)} \right) dx_j \\ pour \quad \mathrm{j} = 1, 2, ..., \mathrm{n}_1 \end{cases}$$

Pour (12) on peut se reporter à (VENSTEL, 1973)

Problème posé

Trouver dans le cas $2 \leq n_1 \leq n$ un contrôle optimal $u = (u_1, \ldots, u_r)$ telle que J(u) soit maximale.

Existence d'un control optimal

Pour le cas d'un problème à une seule variable x_1, (c'est-à-dire pour $n_1 = 1$), on sait déterminer un contrôle admissible u rendant J(u) maximal (cf. § III, 3°). (ZOUBOV,1978)

Pour $n_1 \geq 2$ le problème est à notre connaissance ouvert. Nous nous proposons de le résoudre dans ce cas moyennant les hypothèses ci-dessous :

Hypothèses de notre étude

On suppose :

H_1) Les éléments des matrices *A(t), B(t), C(t)* et du vecteur *f(t)* sont continus sur *[0,T]*.

H_2) La matrice B est choisie de manière que les composantes $\left(\alpha_{s\,j}(t,\tau)\right)_{1 \leq s \leq n_1}^{1 \leq j \leq r}$

de la matrice $Z(t)\, Z^{\prime}(\tau)\, B(\tau)$ soient strictement positifs et assez petits (cf. § III, 1°)

H_3) L'état initial $x°$ et le contrôle admissible $u°$ (élément initial de la suite récurrente v^l) sont choisis afin que l'on ait :

$a_s^{\circ}(T) < 0, \quad -l_s < a_s(u^{\circ}) < 0$ (cf. § III, 2°).

Proposition

Soit $u°$ un élément de l'ensemble U tel que pour tout $j = 1, \ldots, r$, $u_j^{\circ}(t) < 0$ pour tout t

La suite récurrente (v^l) définie par

$$\begin{cases} v^{\circ} = u^{\circ} \\ v^l = \dfrac{u^{\circ}}{2^l} + \theta^{\circ} \end{cases} \left(\begin{array}{l} avec\, \theta^{\circ} \in U, 0 \leq \theta_j^{\circ}(t) \leq 1, \forall t \in [0, T] \\ l \in N \end{array} \right.$$

est une suite qui converge dans U.

De plus sa limite η réalise $J(\eta) = \lim\limits_{l \to +\infty} J(v^l)$.

Démonstration

[1] Remarques

- Il est immédiat que $u° \in U$ et $\theta° \in$ U
- $\forall l, v^l \in U$

En effet :

$\frac{u^\circ}{2^l} \in U$ puisque $u^\circ \in U$

Pour $j = 1, \ldots, r$, pour $t \in [O,T]$ on choisit $\overset{\circ}{u}_j < 0$ (cf. § III, 2°), donc $\frac{\overset{\circ}{u}_j(t)}{2^l} < 0$ et $\frac{|\overset{\circ}{u}_j(t)|}{2^l} \leq 1$

pour $t \in [0,T]$

On déduit aussitôt que pour tout $t \in [0,T]$

$\left|\frac{\overset{\circ}{u}_j(t)}{2^l} + \overset{\circ}{\theta}_j(t)\right| \leq 1$. Par suite : $\left(\frac{u^\circ}{2^l} \in \Gamma \text{ et } \theta^\circ \in \Gamma\right) \Rightarrow \left(\frac{u^\circ}{2^l} + \theta^\circ\right) \in U$

Il est immédiat que

$\lim_{l \to +\infty} \|v^l - \theta^\circ\|_\Gamma = 0$. Par conséquent $v^l \to \theta^\circ \in U$.

[2] Autres Résultats

Lemme 2.1

Soient $u, v \in U$ tels que :

$|a_s(T,u)| < |a_s(T,v)|$ pour $s = 1, \ldots, n_1$. Alors $J(u) > J(v)$.

En effet :

Pour s donné, $J_s(u) = \frac{1}{D_s(T)\sqrt{2\pi}} \int_{-l_s}^{l_s} \exp\left(- \frac{(x_s - a_s(T,u))^2}{2D_s^2(T)} \right) dx_s$

Rappelons que la variance $D_s^2(T,u)$ est indépendante de u, d'où la notation,

$D_s(T,u) = D_s(T)$;

On observe que :

- pour les u tels que $a_s(T,u) > 0$; J_s croît lorsque $a_s(T,u)$ décroît.
- pour les u tels que $a_s(T,u) < 0$; J_s croît lorsque $a_s(T,u)$ croît.

  En résumé $|a_s(T,u)| < |a_s(T,v)| \Rightarrow J_s(u) > J_s(v)$

  Comme $J_s(w) > 0$ pour tout $w \in U$, $|a_s(w)| < l_s$

On déduit alors :

$$J(u) = \prod_{s=1}^{n_1} J_s(u) > \prod_{s=1}^{n_1} J_s(v) = J(v)$$

Lemme 2.2

La suite $\left(v^l\right)_{l\in N}$ vérifie $a_s(v^l)<0$ pour tout $l\in N$ et pour tout $s = 1, \dots, n_l$.

En effet : $a_s\left(v^l\right)=a_s^{\circ}(T)+\int_0^T\sum_{j=1}^{r}\alpha_{sj}(T,\tau)\left[\frac{u_j^{\circ}(\tau)}{2l}+\theta_j^{\circ}(\tau)\right]d\tau$

Par hypothèse $a_s^{\circ}(T)<0$ et $\left|\alpha_{sj}(T,\tau)\right|\sim 0$,

ce qui implique :

$$\forall l,\quad a_s\left(v^l\right)<0$$

Lemme 2.3

$\forall l\in N,\ J\left(v^{l+1}\right)>J\left(v^l\right)$

Preuve

On a :

$$a_s\left(v^{l+1}\right)-a_s\left(v^l\right)=\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{sj}(T,\tau)\left[\frac{u_j^{\circ}(\tau)}{2^{l+1}}-\frac{u_j^{\circ}(\tau)}{2^l}\right]d\tau$$

$$=-\frac{1}{2^{l+1}}\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{sj}\,u_j^{\circ}(\tau)d\tau>0$$

d'où $a_s(v^{l+1})>a_s(v^l)$

$\forall l,\ a_s(v^l)<0$ *et* $a_s(v^{l+1})<0$

$a_s(v^{l+1})>a_s(v^l)$ implique $|a_s(v^{l+1})|<|a_s(v^l)|$

pour tout $l\in N^*$ *et* $s=1, \dots, n_l$

En vertu du Lemme (2.1) il s'ensuit l'inégalité

$J(v^{l+1})>J(v^l)$ pour tout l.

Lemme 2.4

La suite $(J(v^l))_l$ converge dans R.

Preuve

$0<J_s(v^l)\le 1$ pour tout $s=1, \dots, n_l$ et pour tout $l\in N$, on a $J(v^l)=\prod_{s=1}^{n_1}J_s\left(v^l\right)\le 1$.

La suite $(J(v^l)_{l=1,2,\dots}$ est une suite de réels, monotone croissante et majorée. Par conséquent cette suite converge vers un réel noté $L=\lim_{l\to+\infty}J(v^l)$

Lemme 2.5

La fonctionnelle J(u) est continue

Preuve

$$a_s(T,u)= a_s^{\circ}(T)+\int_0^T \sum_{j=1}^{r} \alpha_{sj}(T,\tau)u_j(\tau)d\tau,\ s = 1, \ldots, n_1$$

Considérons les fonctions $a_s : u \to a_s(T,u)$ et $F_s : R \to [0,1]$

où $F_s : \lambda \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, D_s(T)}\displaystyle\int_{-l_s}^{l_s} \exp\left(- \dfrac{(x_s - \lambda)^2}{2D_s^2(T)}\right)dx_s$

- $a_s(T,u)$ est une fonction continue en u.

Noter que

$$|a_s(T,u) - a_s(T,v)| = \left|\int_0^T \sum_{j=1}^{r} \alpha_{sj}(T,\tau)(u_j(\tau)-v_j(\tau))d\tau\right| \le \int_0^T \sum |\alpha_{sj}(T,\tau)||u_j(\tau)-v_j(\tau)|d\tau$$

L'application $\tau \to \alpha_{sj}(T,\tau)$ est continue sur $[0,T]$; il existe donc une constante positive $K_{sj}(T)$ telle que $|\alpha_{sj}(T,\tau)| \le K_{sj}(T)$ sur $[0,T]$.

On d duit l in galit

$$|a_s(T,u)-a_s(T,v)| \le K_s(T)\sum_{j=1}^{r} \int_0^T |u_j(\tau)-v_j(\tau)|d\tau \qquad \text{avec } \left(K_s(T)=\max_{1\le j\le r} K_{sj}(T)\right)$$

$$\le TK_s(T)r\,\|u-v\|_{L^1}$$

$$\le K\|u-v\|_{L^1} \quad \text{avec } K = rTK_s(T)$$

autrement dit $a_s(u)$ est une fonction continue en u.

2.5.2 F_s est une fonction continue en λ

Pour ce faire, considérons $f_s : \lambda \to f_s(x,\lambda)= \exp\left(- \dfrac{(x_s - \lambda)^2}{2D_s^2(T)}\right)$

Pour $x_s \in [-l_s, l_s]$ et $\lambda \in R$, on a

$\dfrac{-(x_s-\lambda)^2}{2D_s^2(T)} \le 0$ et par suite $0 \le \exp\left(- \dfrac{(x_s - \lambda)^2}{2D_s^2(T)}\right) \le 1$

donc $|f_s(x,\lambda)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, D_s(T)}$

La fonction constante $h : x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, D_s(T)}$ est intégrable sur $[-l_s, l_s]$.

En vertu du théorème de continuité des fonctions intégrales il s'ensuit que :

$$F_s : R \to [0,1]$$
$$\lambda \mapsto \int_{-ls}^{ls} f_s(x_s, \lambda) dx_s$$

est continue en tout point $\lambda \in R$.

On déduit que

$$J_s : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, D_s(T)} \int_{-l_s}^{l_s} \exp\left(- \frac{(x_s - a_s(T,u))^2}{2D_s^2(T)} \right) dx_s$$

J_s composée de fonctions continues F_s et a_s est par conséquent continue en u.

Alors $J(u) = \prod_{s=1}^{n_1} J_s(u)$ est continue en tant que produit des fonctions continues $J_s(u)$, $s = 1, \ldots, n_1$.

[3] Conséquence

J(u) continue implique

$$\lim_{l \to \infty} J(v^l) = J\left(\lim_{l \to \infty} v^l \right) = J(\theta_\circ) = L$$

Théorème

Le contrôle z_0 défini par $z_j^0 = +1$ pour $j = 1, \ldots, r$ maximise la fonctionnelle J dans U.

Démonstration

Remplaçant θ° par z° dans (§ II, 2°), on déduit que

$$v^l = \frac{u^\circ}{2^l} + z^\circ \in U \text{ et } \lim_{l \to \infty} v^{l} = z^\circ \text{ (dans } \Gamma)$$

Par conséquent

$$\lim_{l \to \infty} J_s(v^l) = J_s(z^\circ)$$

Par hypothèse on a :

i) $\forall s,\ a_s^\circ(T) < 0,\quad a_s^\circ(T) + \int_0^T \sum \left| \alpha_{sj}(T,\tau) \right| d\tau < 0$ (cf. § III, 2°)

ii) Le contrôle admissible $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_r^0)$ tel que pour tout $j = 1, \ldots, r$; $z_j^0(t) = -\operatorname{sgn}(a_s^\circ(T) \alpha_{sj}(T,t)) = +1$ maximise moyennant les conditions (i) ci-dessus, la fonctionnelle $J_s(v)$ dans U ; soit : $J_s(z^\circ) = \max_{v \in U} J_s(v)$

iii) $J(z^\circ) = \prod_{s=1}^{n_1} J_s(z^\circ)$ est par suite un maximum de $J(v)$ dans U ; autrement dit z° est un contrôle optimal de J.

Appendice

Proposition

A toute matrice fondamentale Z relative au système (E_q) on peut associer une matrice $B(\tau)$ continue sur $[0,T]$ telle que $\alpha_{sj}(T,\tau) > 0$ pour tout $s=1,\dots,n$ et pour tout $j = 1,\dots, r$.

Démonstration

Rappelons la formule de Cauchy donnant l'expression de la solution $x(t)$ du système (E_q), à savoir :

$$x(t)=Z(t)x^\circ+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau)+f(\tau)+C(\tau)Y(\tau)]d\tau$$

où Z(t) est la matrice fondamentale du système

$$\begin{cases} x(t)=A(t)x(t) \\ x(0)=x^\circ \end{cases}$$

Les $\alpha_{sj}(T,\tau)$, $s=1,\dots, n\,; j=1,\dots, r$ sont les composantes de la matrice $Z(T)\,Z^{-1}(\tau)\,B(\tau)$.

$det(Z) \neq 0$ (cf. PONTRIAGUINE, 1969) permet de trouver pour tout $\left(\alpha_{sj}(T,\tau)\right)_{1\le j\le r}^{1\le s\le n}$

une matrice $B(\tau)=\left(b_{sj}(\tau)\right)_{1\le j\le r}^{1\le s\le n}$ telle que l'égalité ci-dessous soit vérifiée ; soit :

$Z(T)\,Z^{-1}(\tau)\,B(\tau) = (\alpha_{sj}(T,\tau))$.

Nous pourrons en particulier choisir les (α_{sj}) tels que pour tout $\tau \in [0,T]$, $\alpha_{sj}(T,\tau) > 0$ et $\alpha_{sj}(T,\tau)$ aussi petit que l'on veut et cela pour tout $j = 1,\dots, r$ et pour tout $s = 1,\dots, n$.

Proposition

Il existe un état initial $x^\circ \in R^n$ et un contrôle admissible u° tels que pour $s=1,\dots,n_1$, $a_s^\circ(T)<0$ et $-1_s < a_s(u^\circ)<0$.

Démonstration

On peut trouver dans U (ensemble de contrôles admissibles) un contrôle noté $u^\circ=\left(u_1^\circ,\dots,u_r^\circ\right)$ dont chaque composante est strictement négative.

Les $\left(\alpha_{sj}(T,\tau)\right)_{1\le j\le r}$ toutes positives quel que soit s, donnent

$$(\beta)\sum_{j=1}^{r}\alpha_{sj}(T,\tau)u_j(\tau)<0 \quad \text{pour } s=1,\dots,n_1$$

$$a_s^\circ(T)=\left(Z(T)E(x^\circ)+\int_0^T Z(T)Z^{-1}(\tau)[f(\tau)+C(\tau)Y(\tau)]d\tau\right).$$

$Z(T)\ E(x°)$ dépend de l'état initial x°, il est donc possible de choisir la $s^{ième}$ composante du vecteur x° arbitraire afin que

$a_s^{\circ}(T) = \left(Z(T)E(x°)\right)_s + \left(\int_0^T Z(T)Z^{-1}(\tau)[f(\tau)+C(\tau)Y(\tau)]d\tau\right)_s < 0$, lorsque l'on connaît les matrices Z, C et les vecteurs f et Y.

Rappelons que $\left(E(x°)\right)_s = x_s^{\circ}\ P\left(X = x_s^{\circ}\right)$

Pour x_s° judicieusement choisi on obtient $a_s^{\circ}(T) < 0$

puisque $Z(T)$ et $\int_0^T Z(T)Z^{-1}(\tau)[f(\tau)+C(\tau)Y(\tau)]d\tau$ sont des grandeurs fixées avec les données.

Si $a_s^{\circ}(T) < 0$, il vient que : (cf. (β))

$$a_s(u°) = a_s^{\circ}(T) + \int_0^T \sum_{j=1}^{r} \alpha_{sj}(T,\tau)\,u_j^{\circ}(\tau)d\tau < 0$$

Un choix judicieux de $x°$ et des α_{sj} donne :

$$-l_s < a_s(u°) < 0 \quad (\gamma)$$

Cette condition implique $|a_s(z°)| < l_s$ puisque a_s est une application continue et que pour tout

$p \geq 1,\ |a_s(v^p)| < |a_s(u°)| < l_s$

Rappel des résultats dans le cas $n_1 = 1$

Pour $n_1 = 1$, $J(u) = J_1(u)$ (c'est à dire $s = n_1 = 1$)

$$J_1(u) = \int_{-l_1}^{l_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,D_1(T)} \exp\left(-\frac{(x - a_1(T))^2}{2D_1^2(T)}\right)dx$$

Désignons par $u° = \left(u_1^{\circ},...,u_r^{\circ}\right)$ un contrôle optimal de la fonctionnelle J_1.

Plusieurs cas ont été considérés pour déterminer un contrôle optimal, ces divers cas sont étudiés relativement à $a_1^{\circ}(T)$.

<u>1er cas</u> : $a_1^{\circ}(T) = 0$

Alors $\overline{u}° = 0$, défini par $\overline{u}°(t) = 0$ pour tout $t \in [O,T]$ constitue un contrôle optimal.

<u>2e cas</u> : $a_1^{\circ}(T) > 0$ et $a_1^{\circ}(T) - \int_0^T \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{1j}(T,\tau)|d\tau > 0$

Alors $\overline{u}°$ défini par :

$\forall t \in [0,T],\ \forall j = 1,...,r,\ \overline{u}_j^{\circ}(t) = -\mathrm{sgn}\left[a_1^{\circ}(T)\alpha_{1j}(T,t)\right]$ i.e $u_j^{\circ}(T) = -1$

est un contrôle optimal de J_1.

3^e cas : $a_1^\circ(T) > 0$ et $a_1^\circ(T) - \int_0^T \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{1j}(T,\tau)| d\tau < 0$

Soit t_0 la plus petite valeur de [0,T] réalisant

$$a_1^\circ(T) - \int_0^{t_0} \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{1j}(T,\tau)| d\tau = 0$$

Considérons alors :

$$\overline{u}_j^\circ(t) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} a_1^\circ(\mathrm{T})\alpha_{1j}(\mathrm{T},t) & \text{pour tout } t \in [0,t_0] \\ 0 \ \textit{pour}\ t \in [t_0, T] \\ j = 1,\ldots, r \end{cases}$$

$\overline{u}^\circ = (\overline{u}_1^\circ, \ldots, \overline{u}_r^\circ)$ est un contrôle optimal de J_1

4^e cas : $a_1^\circ(T) < 0$ et $a_1^\circ(T) + \int_0^T \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{1j}(T,\tau)| d\tau < 0$

Alors $\overline{u}^\circ$ défini par :

$\forall t \in [0,T]$ $\forall j = 1,\ldots,r$, $\overline{u}_j^\circ(t) = -\operatorname{sgn}[a_1^\circ(\mathrm{T})\alpha_{1j}(\mathrm{T},t)]$ est un contrôle optimal de J_1.

5^e cas : $a_1^\circ(T) < 0$ et $a_1^\circ(T) + \int_0^T \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{1j}(T,\tau)| d\tau > 0$

Soit t_0 la plus petite valeur de t dans *[0,T]* telle que

$$a_1^\circ(T) + \int_0^{t_0} \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{1j}(T,\tau)| d\tau = 0$$

$$\forall j = 1,\ldots, r, \forall t \in [0,T], \ \overline{u}_j^\circ(t) = \begin{cases} 0 \ \textit{pour}\ t \in [0,t_0] \\ -\operatorname{sgn}\ [a_1^\circ(T)\alpha_{1j}(T,t)] \ \textit{pour}\ t \in \,]t_0, T] \end{cases}$$

constitue un contrôle optimal de J_1.

Références citées

BENSOUSSAN A., 1971. Filtrage optimal des systèmes linéaires, édition Dunod, Paris, France, 338 p.

CHAMBADAL L., OVAERT L., 1968. Algèbre linéaire et algèbre tensorielle, édition Dunod Paris, France, 544 p.

GUICHARDET A., 1973. Calcul intégral, édition Armand Colin-collection U , Paris, France, 263 p.

PONTRIAGUINE L., 1969. Equations différentielles linéaires (trad Russe) édition Mir Moscou, URSS, 304 p.

VENSTEL H., 1973. Théorie des probabilités (trad du Russe) édition Mir Moscou, URSS, 563 p.

ZOUBOV V., 1978. Théorie de la commande (trad du Russe) édition Mir Moscou, URSS, 466 p.