

## Résumé

On appelle complexité d'une suite infinie  $u$  à valeurs dans un ensemble fini, la fonction  $P_u$  qui compte le nombre de facteurs de longueur donnée de cette suite. Nous décrivons ici une méthode récurrente de construction des facteurs spéciaux de suites automatiques qui permet de trouver des formules explicites pour la complexité de certaines suites.

**Mots-clés :** Suites infinies, substitutions, facteurs spéciaux, complexité.

## Special factors and complexity

### Abstract

The complexity of an infinite sequence  $u$  taking its values in a finite set counts the number  $P_u(n)$  of factors of a given length  $n$  of this sequence. We describe here an inductive method to construct the special factors of some automatic sequences which allow us to compute the complexity function of some sequences.

**Keywords:** Infinite sequences, substitutions, special factors, complexity.

## Introduction

Une suite finie  $m = (m_0, m_1, \dots, m_n)$  dans un ensemble fini  $A$  de symboles est vue comme un mot (fini)  $m_0m_1\dots m_n$  sur l'alphabet  $A$  et par extension, une suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow A$  sera vue comme un mot infini  $u = m_0m_1\dots m_n\dots$ . On parlera alors indifféremment de mot infini ou de suite infinie. Une méthode simple pour construire de tels mots est de procéder par itérations d'une substitution. Chaque lettre d'un mot  $m$  est remplacée par un mot et ainsi de suite. On obtient de cette manière des mots dont les régularités ont retenu en premier lieu l'attention (ARSON, 1937 ; LOTHAIRE, 1983).

L'étude des facteurs de suites infinies remonte au moins aux travaux de THUE, 1906 et 1912. L'intuition selon laquelle une suite est d'autant plus « compliquée » qu'elle a « beaucoup » de facteurs distincts a introduit la notion de « complexité » d'une suite de la manière suivante : Soit  $A$  un alphabet et  $u = (u_n)_n$  une suite à valeurs dans  $A$ . On appelle fonction de complexité de  $u$ , et on note  $P_u$ , la fonction qui compte le nombre de facteurs distincts de  $u$  de longueur donnée. Autrement dit,  $P_u$  est défini sur les entiers par  $P_u(n) = \text{Card}\{w \in A^n / \exists k, w = u_k u_{k+1} \dots u_{k+n-1}\}$ . Depuis un premier résultat dû à Cobham (COBHAM, 1972), de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la complexité : (TAPSOBA, 1994 ; IVAN, 1987 ; MIGNOSI, 1989 et 1991 ; MOULINE, 1990 ; ARNOUX et RAUZI, 1991 ; ALLOUCHE et SHLLIT, 1992 ; LEPSITO, 1993 ; ALLOUCHE, 1994 ; TROMP et SHALLIT, 1995 ; MOSSE, 1996 ; FERENCZY, 1997).

---

<sup>1</sup> Ecole Supérieure d'Informatique, Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso, 01 BP 1091 Bobo-Dioulasso 01, Burkina Faso ; Tél : (+ 226) 70 26 05 14 ; E-Mail : theo\_tapsoba@univ-ouaga.bf

## Définitions et notations

Soit  $A^*$  le monoïde libre engendré par un ensemble fini non vide  $A$  appelé alphabet. Les éléments de  $A$  sont appelés lettres et ceux de  $A^*$  mots. Pour tout mot  $v$  de  $A^*$ ,  $|v|$  désigne la longueur de  $v$ , c'est-à-dire le nombre de ses lettres. L'élément neutre de  $A^*$  noté  $\varepsilon$  est le mot vide ; c'est le mot de longueur 0. Posons  $A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$ .

Un mot  $v$  est dit facteur de  $w$  si  $w = xvy$  avec  $x$  et  $y$  dans  $A^*$ . On écrit alors  $v|w$ . Si  $x = \varepsilon$  (resp.  $y = \varepsilon$ ),  $v$  est dit préfixe (resp. suffixe) de  $w$ . Un préfixe ou un suffixe de  $w$  est dit strict s'il est différent de  $w$ . Désignons par  $M(A)$  l'ensemble  $A^* \cup A^\infty$  où  $A^\infty$  est l'ensemble des mots infinis dont les lettres sont dans  $A$ . Soit  $u$  un mot fini ou infini. L'ensemble des facteurs finis de  $u$  est noté  $F(u)$  et celui des facteurs de longueur  $n$ ,  $F_n(u)$ . Il est clair que tout facteur d'un mot  $v$  de  $F(u)$  est un mot de  $F(u)$  et qu'il existe une lettre  $a$  telle que  $va \in F(u)$ . Le facteur  $v$  de  $u$  est dit spécial si pour toute lettre  $i$  de  $A$ ,  $vi$  est facteur de  $u$ .  $FS(u)$  désigne l'ensemble des facteurs spéciaux de  $u$  et  $FS_n(u)$  celui des facteurs spéciaux de longueur  $n$ .

On appelle substitution, une application  $f : A \rightarrow A^*$ . Cette application se prolonge de manière naturelle en un morphisme de  $A^*$  dans  $A^*$ . Une substitution  $f$  est dite de longueur constante ou uniforme de module  $\sigma$ , si  $\sigma = |f(i)|$  pour toute lettre  $i$  de  $A$ , croissante si  $|f(i)| \geq 2$ . S'il existe une lettre  $a$  de  $A$  telle que  $f(a) = am$  avec  $|m| > 0$ , alors l'ensemble des mots infinis de préfixes  $a$  possède un point fixe  $u = amf(m)f(m)\dots f(m)\dots$ .

Pour tout entier  $k \geq 2$ , désignons par  $[k]$  l'alphabet  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ . Un  $k$ -automate est défini par :

- (i) deux alphabets  $\Sigma$  et  $E$ .
- (ii) un point initial  $x_0$  de  $\Sigma$ .
- (iii) une application  $\varphi : [k] \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,
- (iv) une application  $\tau : \Sigma \rightarrow E$ .

Pour tout  $(j, x) \in [k] \times \Sigma$ , on pose  $\varphi(j, x) = j(x)$  ou plus simplement  $jx$ .

On prolonge alors  $\varphi : [k] \times \Sigma \rightarrow \Sigma$  en une application, encore notée  $\varphi : [k]^* \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Soit  $e_g, e_{g-1}, \dots, e_0$  dans  $[k]$  et  $x$  dans  $\Sigma$ . Posons alors  $e_g e_{g-1} \dots e_0(x) = e_g e_{g-1} \dots (e_0(x))$  et  $j(\varepsilon, x) = x$ .

Soit l'entier  $n \geq 1$  développé comme suit :  $\sum_{i=0}^{\infty} e_i(n)k^i$  et soit  $g$  le plus grand entier contenu dans  $\frac{\log n}{\log k}$ .

Si  $j > g$  posons  $e_j(n) = 0$  et  $e_g(n) \neq 0$ .

L'entier  $n$  peut alors être représenté par  $e_g(n)e_{g-1}(n) \dots e_0(n) \in [k]^*$  et 0 par le mot vide.

Pour  $x \in \Sigma$ , posons  $nx = e_g(n)e_{g-1}(n) \dots e_0(n)x$ . Ainsi lorsque  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ ,  $(nx_0)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite infinie d'éléments de  $\Sigma$  et  $(\tau(nx_0))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite infinie d'éléments dans  $E$ . On dit qu'une suite  $\tau$  est  $k$ -reconnaissable s'il existe un  $k$ -automate  $(\Sigma, x_0, \varphi, E, \tau)$  tel que  $\tau = (nx_0)_{n \in \mathbb{N}}$ . Comme mentionné dans RAUZY, 1982-1983, le comportement de  $P(n)$  est lié à l'entropie topologique  $h$  du système dynamique associé par la relation :  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P(n)}{n}$ .

Une manière naturelle de découper (découpage de niveau  $k$ ) le mot infini  $u$  consiste à faire intervenir les ensembles :  $E_k = \{\varepsilon\} \cup \{f^k(u[0, p]) : p > 0\}$  où  $u[i, j]$  désigne le mot  $u_i u_{i+1} \dots u_j$  ( $j \geq i$ ).



MARTIN, 1973, qui est l'un des premiers à avoir étudié ces problèmes de découpage, qualifie de déterminée à l'ordre  $k$ , une substitution  $f$  pour laquelle dès qu'un facteur  $m$  est assez long, le découpage de niveau  $k$  et les lettres dont  $m$  provient par  $f^k$  ne dépendent pas des rangs où  $m$  apparaît...

Soit  $w$  un facteur de  $u$ . Il peut toujours se factoriser sous la forme : (2)  $w = xf(v)y$ .

Dans (2)  $x$  est préfixe strict d'un mot  $f(v_1)$ ,  $y$  un préfixe strict d'un mot  $f(v_2)$  et  $v_1, v_2 \in A$ .

Un facteur  $w$  est dit rythmé si sa décomposition sous la forme (2) est unique.

Dans (TAPSOBA, 1994) on a le résultat fondamental suivant :

**Proposition 2.1** *Soit  $u$  un point fixe d'une substitution injective uniforme de longueur  $\sigma$  sur l'alphabet  $A = \{1, 2, \dots, q\}$ . On suppose  $u \in 1A^*$ ,  $u$  minimale mais pas périodique. Alors il existe  $L_0$  dépendant de  $\sigma$  et de  $q$  tel que tout facteur  $m$  de  $u$  de longueur  $> L_0$  soit un mot rythmé.*

## Construction récurrente des facteurs spéciaux

Notre but est de donner une méthode récurrente de détermination des facteurs spéciaux des suites automatiques (points fixes de substitutions injectives de longueur constante) sans contrainte sur le cardinal de l'alphabet.

Commençons par donner quelques propriétés des facteurs spéciaux.

**Proposition 3.1** *Tout suffixe d'un facteur spécial est spécial.*

**Preuve :** Soit  $w = xv$  un facteur spécial de  $u$ . Pour toute lettre  $i \in A$ ,  $xvi = wi$  est un facteur de  $u$  et  $vi$  est donc un facteur de  $u$ . Ainsi  $v$  est spécial.

Le corollaire suivant est immédiat :

**Corollaire 3.1** Si  $FS(p)$  est vide, alors pour tout  $n \geq p$ ,  $FS(n)$  est vide.

Soit  $n$  un entier  $> L_0$ , où  $L_0$  est la constante de la proposition 2.1. Pour deux lettres distinctes  $i$  et  $j$ , notons  $P_{i,j}$  (resp.  $P$ ) le plus grand préfixe commun à  $f(i)$  et  $f(j)$  (resp. le plus grand préfixe commun à tous les  $f(i)$ ). De façon similaire on définit  $S_{i,j}$  et  $S$  sur les suffixes. En posant  $\alpha_{i,j} = |P_{i,j}|$ ,  $\alpha = |P|$ ,  $\mu_{i,j} = |S_{i,j}|$  et  $\mu = |S|$ , on a les résultats suivants :

**Proposition 3.2** *S'il existe deux lettres  $i$  et  $j$  telles que  $P_{i,j} \neq P$ , alors il n'existe pas de facteur spécial de longueur  $n > L_0$ .*

**Preuve :** par l'absurde : Supposons  $FS_n(u)$  non vide et soit  $w = xf(v)y$  une factorisation d'un facteur spécial de longueur  $n > L_0$ . Cette factorisation est unique en vertu de la proposition 2.1. Comme  $wi$  est facteur de  $u$  pour tout  $i \in A$ , chacun des  $\text{Card}(A)$  différents facteurs  $yi$  est un préfixe d'exactly un  $f(k)$ .

Comme cette correspondance est bijective, on a  $P_{i,j} = y$  pour tout couple  $(i,j)$  de lettres distinctes.

Donnons à présent une construction inductive des facteurs spéciaux :

**Proposition 3.3** *Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $\sigma k + \alpha \geq n$ . Supposons que pour deux lettres distinctes quelconques  $i$  et  $j$ ,  $P_{i,j} = P$ . Alors les facteurs spéciaux de longueur  $n > L_0$  sont les suffixes de longueur  $(n-\alpha)$  des images des facteurs spéciaux de longueur  $k$  auxquels on a*

concaténé à droite  $P$ .

**Preuve :** montrons dans un premier temps que la construction ci-dessus donne des facteurs spéciaux : Soit  $v$  un facteur spécial de longueur  $k$ . Alors, pour tout  $i \in A$ ,  $vi$  est un facteur de  $u$ . Il en est de même pour son image qui est de longueur  $\sigma k + \sigma$ . Le préfixe  $f(v)P$  de longueur  $\sigma k + \sigma$  de l'image  $f(vi)$  est spécial car  $P = P_{i,j}$ . Par la proposition 3.1, il en est de même pour tous ses suffixes.

Montrons à présent que tout facteur spécial de longueur  $n > L_0$  peut être obtenu par la construction de la proposition 3.3 : soit  $w$  un facteur spécial de longueur  $n > L_0$ . Par la proposition 2.1,  $w$  est rythmé :  $w = xf(v)y$ , où  $x$  est un suffixe strict de l'image par  $f$  d'une lettre  $j$  et  $y$  préfixe strict de l'image par  $f$  d'une lettre  $k$ . Ainsi  $w$  est-il facteur de  $f(jvk)$  avec  $jvk$  facteur de  $u$ . Comme  $w$  est spécial,  $wi$  est facteur de  $u$  pour toute lettre  $i \in A$ . Chacun des  $\text{Card}(A)$  différents facteurs  $wi$  est un préfixe d'exactly un  $f(k)$ , la correspondance étant bijective. On a donc  $y = P$  et  $jv$  est spécial. Finalement  $w = xf(v)P$  où  $xf(v)$  est un suffixe de  $f(jv)$  avec  $jv$  spécial.

De la démonstration de la proposition 3.3, il vient le résultat suivant :

**Proposition 3.4** *Sous les mêmes hypothèses qu'à la proposition 3.3, deux facteurs spéciaux de longueur  $k$  donnent le même facteur spécial de longueur  $n \in [\sigma(k-1) + \alpha + 1, \sigma k + \alpha]$  si et seulement si  $\mu > 0$  et  $n \leq \sigma(k-1) + \alpha + \mu$ .*

## Facteurs spéciaux et complexité

Rappelons qu'un facteur  $v$  d'un mot infini sur l'alphabet  $A$  est dit spécial si  $vi$  est un facteur de  $u$  pour tout  $i$  dans  $A$ . Sur des alphabets de cardinaux deux, la différence  $s(n) = P_{11}(n+1) - P_{11}(n)$  n'est autre que le nombre de facteurs spéciaux de longueur  $n$ .

L'analyse de  $s(n)$  a permis à BRLEK, 1989 et indépendamment à DE LUCA et VARRICHIO, 1989 de trouver une formule explicite pour la complexité de la suite de Morse. A l'aide des propriétés combinatoires des facteurs spéciaux ayant un préfixe commun, ces deux derniers auteurs ont obtenu un résultat fort intéressant sur les semi-groupes permutables. Ils utilisent entre autres le fait que (voir preuve dans DE LUCA et VARRICHIO, 1988)  $\forall n \geq 1, s(n) \leq 4$ .

En restant toujours sur des alphabets de cardinal deux, l'étude des facteurs spéciaux a permis de construire un automate déterminant  $s(n)$  pour une classe de suites automatiques (TAPSOBA, 1987) et de donner une formule explicite pour la complexité de la suite de Fibonacci. (BERSTEL, 1980-1981). Plus récemment, CASSAIGNE (1997) a pu montrer que si la fonction de complexité d'une suite est à croissance linéaire, alors les différences  $s(n)$  sont bornées par une constante qu'il détermine.

Considérons des suites de 0 et 1 construites par des insertions successives d'une suite périodique des symboles 0, 1 et « trou » dans les trous de la suite précédemment construite. On suppose que finalement tous les « trous » sont remplis par des symboles 0 et 1. Les suites ainsi obtenues sont appelées suites de TOEPLITZ, 1928. Elles sont toutes presque périodiques et ont de nombreuses applications, notamment en théorie ergodique. Diverses propriétés de cette famille de suites ont été découvertes grâce entre autres aux travaux de NEVEU, 1969 ; JACOBS et KEANE, 1969 ; PRODINGER et URBANEK, 1979 ; PRODINGER, 1983 ; WILLIAM, 1984 ; LEMANCZYK, 1988 ; ROJEK, 1989 ; ALLOUCHE et BACHER, 1992, etc.



Soit la substitution  $f$  définie sur l'alphabet  $\{1, 2\}$  par  $f(1) = 1121, f(2) = 2121$  ; comme signalé dans LEMANCZYK, 1988 le mot infini de TOEPLITZ, généralement noté  $T$ , peut être obtenu par itération de  $f$  sur la lettre 1, c'est-à-dire  $T = \lim f^n(1)$ . Si beaucoup de choses sont connues sur cette suite, rien n'avait été fait sur sa complexité. Par l'analyse des facteurs spéciaux nous obtenons une formule explicite pour sa fonction de complexité.

Comme  $P_u(n) = P_u(1) + \sum_{i=1}^{n-1} s(i)$ , trouver  $P_u(n)$  revient à reconnaître pour tout entier, le nombre de facteurs spéciaux. La construction récurrente du paragraphe précédent nous a alors permis d'évaluer la somme des  $s(i)$ . Nous donnons ici une formule explicite pour le mot de Toeplitz, en utilisant une démarche semblable à celle de DE LUCA et VARRICHIO, 1988.

Rappelons qu'un facteur  $x$  de  $T$  est dit spécial si  $x1$  et  $x2$  sont tous facteurs de  $T$ . Comme le mot de Toeplitz est défini sur un ensemble à deux éléments, on a  $P(n+1) = P(n) + \text{Card}(FS(n))$  où  $FS(n)$  est l'ensemble des facteurs spéciaux de  $T$  de longueur  $n$ .

Comme mentionné dans RAUZY, 1979,  $P(n+1) - P(n) = 2$  s'il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $2^k \leq n < \frac{3}{2} \cdot 2^k$ . On a donc  $n+1 \leq P(n) \leq 2n$ .

Ainsi on a

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(1) + \sum_{q=1}^n \text{Card}(FS(q)) \\ &= 2 + n + \text{Card}\{q \in [1, n] ; \text{Card}(FS(q)) = 2\}. \end{aligned}$$

Notons que pour tout  $k \geq 1$ , le nombre d'entiers  $q \in [2^k, \frac{3}{2} \cdot 2^k[$  est égal à  $2^{k-1}$  et que pour tout entier

$n$ , il existe un entier  $k$  tel que  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ .

Ainsi, si  $2^k \leq n < \frac{3}{2} \cdot 2^k = 2^k + 2^{k-1}$  on a

$$\begin{aligned} P(n+1) &= n+2 + \left( \sum_{r=1}^{k-1} 2^{r-1} \right) + n - 2^k + 1 \\ &= 2n+3 + \frac{2^{k-1} - 1}{2 - 1} - 2^k \\ &= 2n+3 + 2^{k-1} - 1 - 2^k \\ &= 2n+2 - 2^{k-1} \\ &= 2(n+1) - 2^{k-1} \end{aligned}$$

et si  $2^k + 2^{k-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^k \leq n < 2^{k+1}$  on a

$$\begin{aligned} P(n+1) &= n+2 + \left( \sum_{r=1}^{k-1} 2^{r-1} \right) \\ &= 2n+2 + \frac{2^{k-1} - 1}{2 - 1} \\ &= n+1+2^k. \end{aligned}$$

Remarquons que si  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , alors  $k \leq \log_2(n) < k+1$  de telle sorte que  $k = [\log_2(n)]$  où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

De plus, comme  $\frac{3}{2} \cdot 2^k = 3 \cdot 2^{k-1}$  on obtient finalement

$$P(n+1) = 2(n+1) - 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1} \text{ si } n < 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$$

$$P(n+1) = (n+1) + 2^{\lceil \log_2(n) \rceil} \text{ si } n \geq 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$$

$$P(n+1) = \begin{cases} 2(n+1) - 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1} & \text{si } n < 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1} \\ (n+1) + 2^{\lceil \log_2(n) \rceil} & \text{si } n \geq 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1} \end{cases}$$

Il est aisé de voir que pour  $n \in [2^k, 2^{k+1}[$ , si  $[\log_2(n)] \neq [\log_2(n-1)]$  alors  $n = 2^k$  et  $[\log_2(n)] = [\log_2(n-1)] + 1$ . Ainsi en remplaçant  $n$  par  $n-1$  dans la formule ci-dessus, on obtient la nouvelle formule suivante qui détermine  $P(n)$  pour  $n > 1$ .

**Proposition 4.1** Pour  $n \geq 2$ ,  $P(n) = 2n - 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$  si  $n \leq 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$  et

$$P(n) = n + 2^{\lceil \log_2(n) \rceil} \text{ si } n > 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner un meilleur encadrement de  $P(n)$ .

**Corollaire 4.1** Pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\frac{3}{2}n \leq P(n) \leq 2n - 1$ .

**Preuve :** Soit  $n > 1$  un entier tel que  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  (ainsi,  $k = [\log_2(n)]$ ). Supposons dans un premier temps que  $n \leq 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$ . Selon la proposition précédente on a  $P(n) = 2n - 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$  et trivialement  $P(n) < 2n$ . Comme  $2^{\lceil \log_2(n) \rceil} \leq n$ , il vient que

$$P(n) \geq 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}.$$

Supposons à présent que  $n > 3 \cdot 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}$ . Dans ce cas  $P(n) = n + 2^{\lceil \log_2(n) \rceil}$ .

Comme  $[\log_2(n)] < \log_2(n)$  (puisque  $n$  ne peut être une puissance de 2), on a  $P(n) < n + n = 2n$ .

Par ailleurs,

comme  $2^{\lceil \log_2(n) \rceil} > \frac{n}{2}$  on obtient  $P(n) > n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$ .

## Références citées

- ALLOUCHE J.-P., 1994. Sur la complexité des suites infinies. *Bulletin Belgium Mathematical Society*, (1), 133-143.
- ALLOUCHE J.-P. et BACHER R., 1992. Toeplitz sequences, paperfolding, towers of Hanoi and progression-free sequences of integers, *L'enseignement Mathématique*, (38), 63-187.
- ALLOUCHE J.-P. and SHALLIT J., 1992. The ring of  $k$ -regular sequences, *Theoretical Computer Science*, (98), 133-143.
- ARNOUX P. et RAUZY G., 1991. Représentation géométrique de suites de complexité  $2n+1$ , *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (119), 199-215.
- ARSON S., 1937. Démonstration de l'existence de suites asymétriques infinies, *Math Sbornik*, (44), 769-777.

- BERSTEL J., 1980-1981.** Mots de Fibonacci, Séminaire d'informatique (L.I.T.P. Université Paris VI et VII), 57-78.
- BRLEK S., 1989.** Enumeration of factors in Thue-Morse word, *Discrete Applied Mathematics*, (24), 83-96.
- CASSAIGNE J., 1997.** Complexité et facteurs spéciaux, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, (4), 67-88.
- COBHAM A., 1972.** Uniform tag sequences, *Mathematic Systems Theory*, (6), 164-192.
- DE LUCA A. and VARRICHIO S., 1988.** Some combinatorial properties of the Thue-Morse Words on three symbols, *Information Processing Letters*, (27), 281-285.
- DE LUCA A. and VARRICHIO S., 1989.** On the factors of Thue-Morse word on three symbols, *Theoretical Computer Science*, (63), 333-348.
- FERENCZY S., 1997.** System of finite rank, *Collection Mathématique*, (73), 35-65.
- IVAN A., 1987.** On the d-complexity of words, *Annales de l'Université Scientifique de Budapest-Section Computer science*, (1), 69-90.
- JACOBS K. and KEANE M., 1969.** 0-1 sequences of Toeplitz type, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, (13), 123-131.
- LEMANCZYK M., 1988.** Toeplitz  $Z^2$  extensions, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, (24), 1-43.
- LEPISTO A., 1993.** On the power of the periodic iteration of morphisms, *Lecture Notes in Computer Science*, (700), 496-506.
- LOTHAIRE M., 1983.** *Combinatorics on words.* Addison Wesley Reading, Cambridge, England, 571 pages.
- MARTIN J. C., 1973.** Minimal flows arising from substitutions of non-constant. *Mathematics Systems Theory* (7), 73-83.
- MIGNOSI F., 1991.** On the numbers of Sturmian words, *Theoretical Computer Science*, (82), 71-84.
- MIGNOSI F., 1989.** Infinite words with linear subword complexity, *Theoretical Computer Science*, (65), 221-242.
- MOSSE B., 1996.** Notion de reconnaissabilité pour les substitutions et complexité des suites automatiques, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, (124), 101-118.
- MOULINE J., 1990.** Contribution à l'étude de la complexité des suites substitutives, Thèse de Doctorat Unique, Université de Provence, Marseille, France, 76 p.
- NEVEU J., 1969.** Sur les suites de Toeplitz, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, (13), 132-134.
- PRODINGER H. and URBANEK F. J., 1979.** Infinite 0-1 sequences without long adjacent identical blocks, *Discrete Mathematics*, (28), 277-289.
- PRODINGER H., 1983.** Non-repetitive infinite sequences and Gray code, *Discrete Mathematics*, (43), 113-116.
- RAUZY G., 1979.** Echanges d'intervalles et transformations induites, *Acta Arithmetica*, (34), 315-328.
- RAUZY G., 1982-1983.** Suites à termes dans un alphabet fini, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, (35), 1-16.
- ROJEK T., 1989.** The classification problem in Toeplitz  $Z^2$  extensions, *Composition Mathématique*, (72), 341-358.
- TAPSOBA T., 1987.** Complexité de suites automatiques, Thèse de Doctorat de 3<sup>e</sup> cycle, Université d'Aix-Marseille II, Marseille, France, 41 p.
- TAPSOBA T., 1994.** Automate calculant la complexité de suites automatiques, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, (6), 127-134.
- THUE A., 1906.** Über unendliche Zeichenreihen, *Norske Vid. Selsk. Skr. I. Ki-christiana*, (7), 1-22.
- THUE A., 1912.** Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, *Norske Vid. Selsk. Skr. I. Math. Nat. Kl. Christiana*, (1), 1-67.
- TOEPLITZ O., 1928.** Biespiele zur theorie des fastperiodischen funktionen, *Mathematic Annals*, (98), 281-295.
- TROMP J. and SHALLIT J., 1995.** Subword complexity of a generalised. Thue-Morse word, *Information Processing Letters*, (54), 313-316.
- WILLIAM S., 1984.** Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, (67), 95-107.