

# Explication mathématique de la structure de la rétine

Daouda TRAORE<sup>1\*</sup>, Kalifa TRAORE<sup>1</sup>  
Mathias KYELEM<sup>1</sup>

## Résumé

L'œil est l'un des organes capitaux qui nous permettent de prendre conscience de l'environnement. Sa fonction est en grande partie liée à la rétine. La compréhension profonde de cette dernière demeure alors déterminante pour une connaissance davantage éclairée du processus à la base de la vision. Beaucoup d'études ont été faites sur la rétine et, différents chercheurs ont proposé des interprétations sur les agencements des cellules ou neurones qui la constituent. Cependant, une explication des différents types et du nombre de types de cellules rétiniennes n'avait jusque-là pas été faite.

En observant les schémas de coupes rétiniennes et les agencements des cellules d'une part et d'autre part, en lisant les interprétations de chercheurs par rapport à la structure de la rétine, nous avons trouvé une formule mathématique qui explique le nombre de types, qui permet de comprendre davantage les interactions entre cellules rétiniennes et qui permet d'apprendre davantage sur les rôles de celles-ci.

La rétine s'appréhende donc mathématiquement. Ce résultat permettrait de donner un nouveau dynamisme concernant les réflexions et les recherches sur l'œil, sur la vision et au-delà, sur le système nerveux.

**Mots-clés :** rétine, cellules photo-réceptrices, cellules amacrines, cellules bipolaires, cellules ganglionnaires, cellules horizontales.

## Mathematic explanation of the retina structure

### Abstract

The eye is one of the essential organs that allow to become aware of the environment. Its function is largely related to the retina. Great knowledge about the retina is essential for a depth grasp of the vision. Many studies have been done on the retina and different researchers have schematized the arrangements of its cells or neurons. However, the explanations of the different kinds and of the number of these kinds are not until now been proposed. By observing the retinal section diagrams on the one hand and on the other hand by relying on the interpretations of the retina cells, we have found a mathematic formula which explain the number and the functions of the retina cells kind. This result would give a new dynamism concerning research on the eye, on the vision and beyond on the nervous system.

**Keywords:** retina, photoreceptor cells, amacrine cells, bipolar cells, ganglion cells, horizontal cells

## Introduction

La rétine, loin d'être un capteur passif, joue un rôle majeur dans le traitement de l'information visuelle. Elle est, en effet, le premier centre d'intégration des informations visuelles (NASSI et CALLAWAY, 2009). Cependant, l'identification et l'explication des différents types de cellules qu'elle regorge, les caractéristiques de celles-ci à extraire de l'image, et la compréhension totale des intégrations des informations visuelles demeurent un défi de recherche très actif.

Comme cellules photosensibles, il ressort que la rétine contient des cellules photoréceptrices de la vision (les cônes et les bâtonnets) impliquées dans la vision ; elle contient aussi une catégorie de cellules ganglionnaires impliquées dans le rythme circadien<sup>2</sup> (BERSON et al., 2002). La formation des images n'est pas la fonction de ces cellules ganglionnaires. Ces dernières sont,

---

<sup>1</sup> Ecole Normale Supérieure (ENS)-Université Norbert Zongo (UNZ), Koudougou, Burkina Faso

<sup>2</sup> Le rythme circadien est en quelque sorte l'horloge interne du corps humain

\***Auteur correspondant** : Email : [ttrada5@gmail.com](mailto:ttrada5@gmail.com)

par ailleurs connectées à des aires cérébrales autres que celles où sont connectées des cellules à bâtonnet et celles à cônes.

Concernant les cellules à cônes, il en existe trois (3) types caractérisés chacun par un pigment spécifique. Ces pigments sont : l'opsine S, l'opsine M et l'opsine L. Les cellules à cône L sont spécialement sensibles au rouge ; les cellules à cône M sont sensibles au vert et les cellules à cône S sont sensibles au bleu. Les cellules à bâtonnets n'ont qu'un seul type de pigment photosensible : la rhodopsine.

La rétine des mammifères est constituée de trois couches de cellules entre lesquelles s'établissent des contacts synaptiques. La première couche est celle des cellules sensorielles (bâtonnets, cônes). La deuxième couche est constituée de Cellules Bipolaires Rétiniennes (CBR), de cellules horizontales et de cellules amacrines. La troisième couche est, quant à elle, formée de Cellules Ganglionnaires Rétiniennes (CGR) dont les fibres constituent le nerf optique.

Les recherches expérimentales faites par des chercheurs comme DACEY (2000) et MASLAND (2012) signalent que la mosaïque des photorécepteurs de la rétine humaine (formée à partir des trois-3- types de cellules à cône et des cellules à bâtonnet) est lue par douze (12) types de CBR qui sont à la base de douze (12) canaux parallèles. Il est précisé que ces douze (12) types de CBR propagent ensuite l'information et la combinent vers une vingtaine de types de CGR (CURCIO C.A. & ALLEN K.A., 1990 ; DACEY, 2011). Celles-ci transforment l'information analogique reçue en potentiels d'action qui est transmise au cerveau.

L'objectif, ici, est de construire une formule mathématique qui puisse expliquer le nombre de types de cellules rétiniennes, de comprendre davantage les interactions entre cellules rétiniennes et éclairer sur les rôles de ces dernières.

## I. Matériel et méthodes

### 1.1. Matériel

Nous avons observé des schémas de la rétine. Notre motivation principale, a été de découvrir des informations mathématiques, qui se cacheraient derrière sa structure. Voici deux (2) figures susceptibles de nous aider dans le raisonnement (voir figure 1 et figure 2)

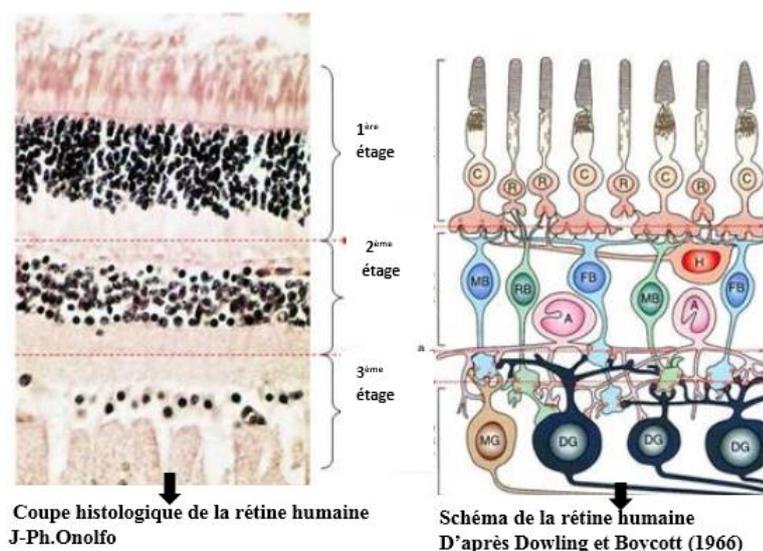


Figure 1 : Les trois couches (étages) de la neurorétine (rétine)

La figure 1 montre une coupe histologique de la rétine humaine (à gauche) interprétée schématiquement (à droite). La coupe et schéma montrent les trois couches (étages) de la rétine. Le schéma montre clairement les interactions entre les cellules des trois couches.

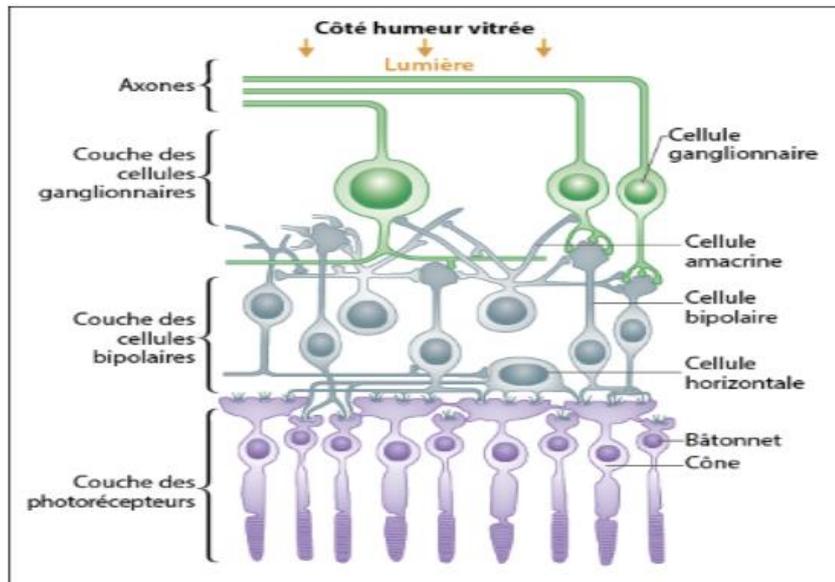


Figure 2 : Annotation des cellules des différents étages de la rétine

Dans cette deuxième figure, les cellules des couches sont nommées.

A partir des deux figures, il se fait comprendre, qu'une cellule de la deuxième couche (CBR, cellules horizontales) peut entrer en contact un (1) ou plusieurs cellules de la première couche (couche des photorécepteurs). Ces informations sont précieuses et donc, elles seront considérées pour l'élaboration de la formule qui sera faite plus bas

## 1.2. Méthodes

Ce travail ne s'inscrit pas dans une certaine orthodoxie traditionnelle basée sur l'expérience dans les sciences de la vie. Il est envisagé dans une logique de réflexion sur des savoirs biologiques déjà existants (surtout sur le système nerveux). Cela a abouti à des constats. De ces constats, a été émis des postulats à partir desquels, une formule mathématique a été construite.

Il s'agit donc d'une construction théorique mais logique comme cela se voit dans les mathématiques et dans la Physique (en particulier, la "Physique théorique". C'est pourquoi, nous pensons que ce que nous envisageons ici pourrait s'inscrire dans une discipline appelée "Biologie théorique".

### 1.2.1. Elaboration d'une formule rétinienne

Les recherches donnent quelques indications sur l'élaboration d'une formule concernant la rétine. En effet, il ressort qu'« A côté de la voie directe qui va des photorécepteurs au cerveau, d'autres types de cellules participent au traitement de l'information visuelle dans la rétine. Ainsi, d'une part les cellules horizontales reçoivent de l'information des photorécepteurs et la transmettent à plusieurs CBR environnants ; d'autre part, les cellules amacrines reçoivent leurs inputs (influx nerveux) des CBR ; ces influx nerveux sont par la suite transmis à plusieurs CGR. »

Ainsi donc, les messages (influx nerveux) bruts issus de certaines cellules photosensibles sont conduit (comme tels) directement au cerveau tandis que les messages d'autres cellules photosensibles n'y sont pas directement conduit comme tels : ces neurones doivent d'abord faire des interactions.

C'est au niveau de ces interactions que des observations ont été faites pour comprendre les caractéristiques de ces dernières et comprendre les nombres de types de ces neurones. En observant donc les schémas de la coupe de la rétine, on réalise qu'une CBR (par l'intermédiaire ou pas d'une cellule horizontale) peut avoir contact avec plus d'une cellule photosensible ; de même, une CGR, par l'intermédiaire ou pas d'une cellule amacrine, peut avoir contact avec plus d'une CBR.

Les deux postulats suivants sont alors émis :

**Postulat 1 :** les CBR sont en contact avec les cellules photosensibles qui sont soit exclusivement du même type, soit de deux (2) types différents, soit de trois (3) types différents ou soit de quatre (4) types différents. En d'autres termes, un CBR est en contact soit :

- ❖ uniquement avec un (1) ou des cellules à bâtonnet ;
- ❖ uniquement avec un (1) des cellules à cône S ;
- ❖ uniquement avec un (1) des cellules à cône M
- ❖ uniquement avec un (1) des cellules à cône L ;
- ❖ avec deux (2) des quatre (4) types ci-dessus cités
- ❖ avec trois (3) des quatre (4) types ci-dessus cités
- ❖ avec tous les quatre (4) types ci-dessus cités

**Postulat 2 :** les CGR sont en contact avec des CBR qui sont soit exclusivement du même type ou soit de plusieurs types différents. Et comme les CBR reçoivent les informations des cellules photoréceptrices qui sont déjà combinées (de toutes les manières possibles) ou pas selon le premier postulat, alors le postulat 2 peut reformuler comme suit : « un CGR reçoit de l'information provenant de cellules photoréceptrices qui sont soit exclusivement de même type, soit de deux (2) types différents, soit de trois (3) types différents ou soit des quatre (4) types différents ». Du postulat 2, on s'attend alors à ce que le nombre de types de CGR soit égal au nombre de types de CBR.

Ces postulats permettent d'admettre que les CBR et les CGR intègrent (fusionnent ou combinent) les influx nerveux venant des niveaux inférieurs (cellules photosensibles et CBR).

## II. Résultats

Les postulats justifient et exigent de faire de l'analyse combinatoire (utilisée en mathématique pour les dénombrements) ; nous devons donc faire des dénombrements par combinaisons et ensuite la somme de ces derniers (somme de combinaison. Soit  $n$  (*entier naturel*), le nombre de cellules photosensibles de la rétine.

$C_n^x$  est le nombre de x-uplets (nombre de groupes de  $x$  éléments pris dans l'ensemble fini formé de  $n$  éléments) possibles à partir de  $n$  éléments ; et:  $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$  (avec  $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * ... * 1$ )

Avec donc  $n$  éléments différents (ici, des récepteurs), il s'agit d'abord de connaître :

- $C_n^1$ , le nombre de groupes de un élément (singletons) que l'on obtient à partir de  $n$  éléments ;
- $C_n^2$ , le nombre de couples que l'on obtient à partir de  $n$  éléments ;
- $C_n^3$ , le nombre de triplets que l'on obtient à partir de  $n$  éléments ;
- et enfin  $C_n^n$ , le nombre de n-uplets que l'on obtient à partir de  $n$  éléments ; notons  $C_n^n = 1$

Le nombre de types de CBR et ou de types de CGR, selon les postulats, correspond à l'ensemble des possibilités des interactions entre les types de récepteurs (ensemble des x-uplets). En tenant compte de  $n$  types de cellules photoréceptrices et de leurs interactions, le nombre de types de CBR et ou de types de CGR est :  $t_n = \sum_1^n C_n^x = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n$

Chacun des  $C_n^x$  ( $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ ) est un coefficient binomial de  $(A+B)^n$ , puisque  $(A+B)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} B^1 + C_n^2 A^{n-2} B^2 + C_n^3 A^{n-3} B^3 + \dots + C_n^n B^n$ .  
 $(A+B)^n = \sum_{x=0}^n (C_n^x * A^{n-x} B^x)$

Pour donc trouver une formule pour  $t_n$ , il s'agit d'abord de faire la somme de ces coefficients binomiaux de  $(A+B)^n$ .

La somme des coefficients binomiaux de  $(A+B)^n$  est :

$$\sum_{x=0}^n (C_n^x) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$$

$$\text{avec } C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = t_n$$

$$\text{Donc, } \sum_{x=0}^n (C_n^x) = C_n^0 + t_n$$

$$t_n = \sum_{x=0}^n (C_n^x) - C_n^0$$

$C_n^0$  est le nombre de 0-uplet (nombre de groupes formés de zéro élément ; dans notre cas, nombre de groupe qui n'a pas récepteurs).  $C_n^0 = 1$

$$\therefore t_n = \sum_{x=0}^n (C_n^x) - 1$$

On trouve  $\sum_{x=0}^n (C_n^x)$ , c'est-à-dire la somme des coefficients binomiaux de  $(A+B)^n$ , à partir du triangle de Pascal qui donne les coefficients binomiaux et permet de calculer leurs sommes.

Nous en faisons une brève présentation :

x	0	1	2	3	...	n	Somme de la ligne
n							
0	$C_0^0 = 1$						$1 = 2^0$
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$					$2 = 2^1$
2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$				$4 = 2^2$
3	$C_3^0 = 1$	$C_3^1 = 3$	$C_3^2 = 3$	$C_3^3 = 1$			$8 = 2^3$
.....	.....	.....	.....	.....	.....		.....
n	$C_n^0 = 1$	...	$C_n^p$	...	$C_n^{n-1}$	$C_n^n = 1$	$2^n$

TRIANGLE DE PASCAL

- ❖ Le nombre situé à l'intersection de la ligne n et de la colonne x représente le coefficient de rang p ;
- ❖ la somme l'une ligne n représente la somme des coefficients binomiaux.
- ✓ Pour n=0, la somme des coefficients binomiaux,  $\sum_{x=0}^n (C_n^x) = 1 = 2^0$
- ✓ Pour n=1, la somme des coefficients binomiaux,  $\sum_{x=0}^n (C_n^x) = 2 = 2^1$
- ✓ Pour n=2, la somme des coefficients binomiaux,  $\sum_{x=0}^n (C_n^x) = 4 = 2^2$
- ✓ Par généralisation, pour  $(A+B)^n$ , la somme des coefficients binomiaux  $\sum_{x=0}^n (C_n^x) = 2^n$

Revenons à  $t_n$  et remplaçons  $\sum_{x=0}^n (C_n^x)$  par sa valeur.

$$\text{Finalement, } t_n = \sum_{x=0}^n (C_n^x) - 1 = 2^n - 1$$

$$t_n = \sum_{x=1}^n C_n^x = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

Après justification, explication et construction de la formule  $t_n$ , mettons cette dernière à

l'épreuve par rapport à la rétine

En considérant le nombre de types connu de cellules photosensibles en lien avec la vision (qui est au nombre de quatre), le nombre de types fondamentaux et fonctionnels de CBR et de CGR en lien avec la vision sera :  $t_4 = 2^4 - 1 = 15$ .

Mais en omettant les cellules à bâtonnet pour ne considérer uniquement qu'aux trois (3) types de cellules à cône, on obtient sept (7) types ( $t_3 = 2^3 - 1$ ) fondamentaux et fonctionnels de CBR et ou de CGR qui ont un lien exclusif avec la vision des couleurs. Il s'agit du bleu, du rouge du vert et des couleurs dérivées des interactions de deux-2-(le jaune, le violet, l'orange) ou des trois-3- (le blanc) couleurs précédentes.

### III. Discussions

#### 3.1. De la vision des couleurs et des rôles théoriques des cellules rétiniennes

Il est connu que l'œil humain perçoit les couleurs suivantes : le rouge, le vert, le bleu, le jaune, le violet, l'orange et le blanc. Ces couleurs sont aussi au nombre de sept (7). Les spécialistes de l'éclairage obtiennent les quatre (4) dernières couleurs citées à partir de combinaisons particulières entre les trois premières (dites couleurs primaires). Des constats similaires se font dans la peinture. Le jaune, le violet, l'orange sont qualifiés de couleurs secondaires. Notons que la couleur blanche qui est une résultante du mélange des trois (3) couleurs primaires n'est ni considérée comme une couleur secondaire, ni comme une couleur tertiaire par les spécialistes de la couleur.

Rappelons que les trois couleurs que sont le bleu, le vert et le rouge sont chacune associée à un des trois types de cônes. On peut donc admettre que la perception des couleurs primaires et secondaires et de la couleur est due aux cônes et à leurs interactions.

Le rôle des cellules à bâtonnet que nous dégageons ici, est la création de nuances pour les couleurs. En effet, en prenant en compte les bâtonnets dans les combinaisons, il est considéré quinze (15) types de CBR et ou de CGR. Dans ce nombre, il est pris en compte les types CBR et ou de CGR résultantes de l'interaction simultanée des trois (3) types de cône et le type de CBR en lien exclusif avec les bâtonnets.

Notons que les types de CBR et ou de CGR résultantes de l'interaction simultanée des trois (3) types de cône sont au nombre de deux (2). En faisant la combinaison, il s'agit du triplet (cône L, cône S, cône M) et du quadruplet (bâtonnet, cône L, cône S, cône M). Comme, on peut le constater, ce triplet et ce quadruplet sont liés au "blanc" qui une couleur à part.

Ainsi donc, sans prendre en compte les trois (3) types de CBR et ou de CGR, c'est-à-dire les CBR et ou de CGR issues exclusivement de l'interaction avec les bâtonnets (qui ne sont pas cellules initialement vouées aux couleurs) et les CBR et ou de CGR issues de l'interaction avec le triplet et le quadruplet précédemment signalés, on obtient douze (12) types de CBR et ou de CGR. Ce résultat est intéressant car, en omettant aussi les couleurs résultantes simultanément des trois (3) couleurs primaires (c'est-à-dire le blanc et ses variantes), les spécialistes de l'éclairage et des couleurs trouvent également douze (12) couleurs. Six (6) de ces couleurs sont qualifiées de tertiaires et sont des nuances des autres couleurs. Ce résultat confirme que les cellules à bâtonnet ont un rôle de créer les couleurs tertiaires et donc de nuancer de couleur.

#### 3.2. Du nombre de types de CBR et de CGR

A partir de nos deux postulats, on s'attendait à quinze (15) types de CBR et aussi à quinze (15) types de CGR.

Concernant les CBR, les recherches expérimentales indiquent l'existence de douze (12)

(DACEY, 2011 ; MASLAND, 2012). Si ce nombre trouvé expérimentalement reste toujours confirmé, la conséquence logique qui s'impose est que : " les CBR ne résultent pas de tous les types d'interactions possibles comme prévu dans le postulat 1 ; elles résultent de douze (12) types d'interactions sur quinze (15) possibles"

Il est à noter que le nombre "douze" (de CBR découverts expérimentalement) rappelle le nombre de types de couleurs (primaires, secondaires et tertiaire) et rappelle aussi le nombre de type de CBR théoriques, si l'on omet les deux types de CBR résultantes des interactions simultanées des trois (3) types de cône (formant le triplet et le quadruplet précédemment signalés) et si aussi on omet le type de CBR en lien exclusif avec les bâtonnets. Ce résultat suggère que la couleur blanche n'est pas formée par les CBR mais par les CGR (comme un fond, à l'image d'un écran blanc de cinéma qui doit recevoir des images)

Selon le raisonnement théorique, le nombre de types (variétés) fonctionnelles de CGR qui ont un lien exclusif avec la vision est quinze (15). Les recherches expérimentales, sans être précises, donnent la fourchette de la vingtaine (CURCIO C.A. & ALLEN K.A., 1990 ; DACEY, 2011), c'est-à-dire une vingtaine de types de CGR. Le nombre quinze (15) que nous trouvons peut être accepté dans cette fourchette.

Notons, par ailleurs, que BERSON et al. (2002) indiquent l'existence d'un cinquième type de cellules photosensibles, la cellule ganglionnaire photosensible nyctémérale qui ne se projetterait dans la même aire du cerveau que les autres CGR. Si la cellule ganglionnaire photosensible nyctémérale n'est donc pas en interaction avec les autres cellules ganglionnaires (comme le suppose les constats), on dénombrait finalement seize (16) types de cellules ganglionnaires (aussi une vingtaine). Ce résultat théorique devrait être vérifié expérimentalement.

## Conclusion

A partir des postulats selon lesquels les CBR et les CGR sont obtenus à partir de toutes les interactions possibles entre les photorécepteurs, nous nous attendions à quinze (15) types de CBR et aussi à quinze (15) types de CGR. Les résultats des travaux expérimentaux, sans être plus claires indique une fourchette de nombre de types de CGR dans laquelle peut être considéré quinze (15), c'est-à-dire une vingtaine. Et, en tenant en compte les cellules ganglionnaires nyctémérales, on obtient exactement seize (16) types de cellules ganglionnaires. Concernant les CBR, les résultats expérimentaux indiquent douze (12) types. Si ce résultat est différent de ce qui avait été prévu, la théorie que nous avons développée permet clairement de d'expliquer ce nombre douze (12).

Ainsi donc, les résultats de nos travaux théoriques sont conformes avec les résultats expérimentaux et sont aussi conformes avec la vision des couleurs par l'œil humain.

Tout en relançant les recherches expérimentales sur la rétine, ce travail permet de confirmer les résultats de recherches antérieures selon lesquelles les CBR et les CGR intègrent et fusionnent les influx nerveux venant de niveaux inférieurs (respectivement des cellules photosensibles et des CBR). Par ailleurs, l'interprétation et la discussion des résultats a non seulement permis de comprendre que toutes les CBR ne sont pas issues de toutes les interactions possibles entre les cellules photoréceptrices mais aussi que les cellules à bâtonnet jouent un rôle insoupçonné : celui de créer des nuances de couleur.

La formule  $t_n = 2^n - 1$ , que nous baptisons "formule de base Traoré Daouda (ftd) est celle qui a permis d'aboutir à ces résultats.

164 rie devrait aussi vérifier la vision de tous les autres animaux.

Quoi que recherche de type fondamentale, nous aboutissons à des résultats qui peuvent assurément aider dans les recherches cliniques et bioniques sur l'œil. Enfin, la rétine et le nerf optique étant des éléments du système nerveux, il est évident que ce travail ouvre une voie de recherche prometteuse sur l'explication (mathématique) de la structure et du fonctionnement du système nerveux tout entier.

### **Références bibliographiques**

DACEY, D.M., 2000. Parallel pathways for spectral coding in primate retina. *Annual Review of Neuroscience*, 23: 743-775.

DACEY D. M., 2011. Origins of perception: retinal ganglion cell diversity and the creation of parallel visual pathways. *In* «The cognitive neurosciences. 3rd ed. », Gazzaniga M. S. (ed.), A Bradford Book, Cambridge, p. 281-301.

BERSON D. M. et al., 2002. Phototransduction by retinal ganglion cells that set the circadian clock, *Science*, vol. 295, pp. 1070-1073,

CURCIO C.A. & ALLEN K.A., 1990. Topography of ganglion cells in human retina. *Journal of Comparative Neurology*, 300 (1), 5-25.

DOWLING J.E & BOYCOTT B.B., 1966. Organization of the primate retina. *Electron microscopy, Proceeding of Royal Society of London*, 166B: 80-111.

MASLAND R.H., 2012. The neuronal organization of the retina. *Neuron*, 76: 266-80.