

# Expérimentation d'une approche de la méthode des volumes finis avec une grille adaptative

---

LAMIEN Kassiéno<sup>1\*</sup> et OUEDRAOGO Mamadou<sup>1</sup>

## Titre courant : méthode des volumes finis avec une grille mobile

### Résumé

Ce travail constitue une réalisation de la pensée selon laquelle à travers l'analyse numérique, les mathématiques sont devenues une science expérimentale. En effet, nous testons une nouvelle démarche de résolution numérique de problème mathématique. Le but étant de mettre en évidence ses avantages par rapport à la démarche traditionnelle. Nous avons ainsi expérimenté une démarche constituée du principe de la méthode des volumes finis décrit par J. A. Mackenzie assortie d'une grille mobile donc le principe a été décrit et utilisé par plusieurs autres auteurs, tels que H. TANG et T. TANG. Le problème test considéré a été celui de Burgers, que nous avons déjà utilisé dans nos travaux antérieurs mais pas avec la même approche que celle considérée ici. Cette fois, les résultats sont plus que satisfaisants.

**Mots et expressions clés :** volumes finis, grille adaptative, forme eulérienne, forme lagrangienne

## Experimentation of a finite volume method approach with an adaptive moving mesh

### Abstract

This work constitutes a realization of the thought that through numerical analysis mathematics has become an experimental science. In fact, we are testing a new approach to numerical resolution of mathematical problems. The main aim is to highlight its advantages compared to the traditional approach. We have thus experimented with an approach consisting of the principle of the finite volumes method described by J. A. Mackenzie combined with an adaptive moving mesh method, so the principle has been described and used by several other authors, such as H. TANG and T. TANG. The test problem considered was that of Burgers, which we have already used in our previous work but not with the same approach as the one considered here. This time, the results are more than satisfactory.

**Keywords :** finite volumes, adaptive moving mesh, eulerian form, lagrangian form

---

<sup>1</sup> Département de mathématiques de l'Institut des Sciences et de Technologie (IST) de l'Ecole Normale Supérieure (ENS), 01 BP 1757 Ouagadougou 01, Burkina Faso.

\*Auteur correspondant, tel :+226 76 37 11 89, Ouagadougou, Burkina Faso, [basilelakas@gmail.com](mailto:basilelakas@gmail.com)

## Introduction

L'analyse numérique est apparue au lendemain de la 2<sup>ème</sup> guerre mondiale. Elle est la discipline qui conçoit et analyse les méthodes ou algorithmes de calcul. Elle permet aux mathématiciens, à travers la simulation numérique, de s'attaquer à des problèmes beaucoup plus complexes et concrets qu'auparavant, (ALLAIRE, 2012). Pour la plus part, ces problèmes sont issus de la modélisation dans les champs d'application des mathématiques, notamment la chimie, la mécanique, la physique, les sciences de la vie et de la terre, l'économie, .... L'essor des ordinateurs a fait des mathématiques, à travers l'analyse numérique, une science expérimentale : on effectue désormais des expériences numériques, qui consistent en des calculs tests sur ordinateur. La qualité des solutions numériques des problèmes dans ce cas sont tributaires de celle des méthodes numériques employées. Ainsi, dans une dynamique de déterminer une solution numérique efficiente de certains problèmes, il est plus avantageux d'utiliser une grille adaptative, pour les méthodes numériques utilisant une discrétisation du domaine de résolution. Cette démarche est récente, elle a été développée après les années 1980 et elle reste peu connue du monde de la recherche, surtout sur le continent africain. Plusieurs propositions de démarche existent. Sous l'accompagnement des belges de la faculté polytechnique de Mont que sont Pr Philippe SAUCEZ, Pr Jacques TEGHEM et Pr Alain VANDE WOUWER, le Professeur Longin SOME de l'université Joseph KIZERBO va soutenir ses travaux de thèse de doctorat unique sur l'expérimentation d'une de ces nouvelles techniques en utilisant la méthode numérique des lignes en 2007, (SOME, 2007). En 2017 et sous la direction du Pr Longin SOME, nous avons soutenu notre thèse de doctorat unique sur l'expérimentation de cette nouvelle démarche en utilisant la méthode numérique des volumes finis, (LAMIEN, 2017). Pour nos précédents travaux (LAMIEN et al., 2020), nous avons utilisé la démarche proposée par H. TANG et T. TANG (2003) directement sur la forme eulérienne des Equations aux Dérivées Partielles (EDPs) des problèmes à résoudre et les résultats n'ont pas été à la hauteur des attentes, raison principale de la poursuite des travaux dans ce sens. Pour cette fois, nous avons entrepris d'expérimenter un mixage de cette proposition avec celle de J. A. Mackenzie pour reprendre la résolution d'un problème test qui est celui de Burgers, en utilisant surtout la forme lagrangienne de l'EDPs de ce problème. Notre objectif est de mettre en évidence, d'une manière beaucoup plus explicite, les avantages de l'utilisation d'une grille adaptative en lieu et place d'une grille statique en utilisant le principe de la méthode des volumes finis selon J. A. Mackenzie telle que décrite dans (MACKENZIE, 1996) et la grille adaptative selon H. TANG et T. TANG (2003), dans la résolution numérique d'un problème test qui est celui de Burger. La partie suivante du document est consacrée à la description de la méthode numérique concernée à travers son application sur la résolution du problème test. Ensuite les résultats de cette

expérimentation seront présentés, interprétés et discutés avant de terminer par une conclusion.

## 1- Description de la méthode numérique

Le problème test à résoudre est celui de Burgers, BENTON and PLATZMAN (1972), il se présente comme suit :

Déterminer sur  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  la grandeur  $U(t, x)$  vérifiant :

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(U(t, x))}{\partial x} = 0, \quad (01)$$

$$U(0, x) = \text{Burgers\_exact}(0, x), \text{ (Condition initiale)} \quad (02)$$

$$\left. \begin{array}{l} U(t, 0) = \text{Burgers\_exact}(t, 0) \\ U(t, 1) = \text{Burgers\_exact}(t, 1) \end{array} \right\} \text{ (Condition aux limites de type Dirichlet)} \quad (03)$$

Avec 
$$f(U(t, x)) = \frac{1}{2}U^2(t, x) - \varepsilon \frac{\partial U(t, x)}{\partial x},$$

$$\text{Burgers\_exact}(t, x) = \frac{0.1r_1 + 0.5r_2 + r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

où 
$$r_1(t, x) = \exp\left(\frac{-x + 0.5 - 4.95t}{20\varepsilon}\right),$$

$$r_2(t, x) = \exp\left(\frac{-x + 0.5 - 0.75t}{4\varepsilon}\right),$$

$$r_3(t, x) = \exp\left(\frac{-x + 0.375}{2\varepsilon}\right).$$

*Burgers\_exact* est la solution exacte du problème constitué par (01), (02) et (03). La disponibilité de cette solution exacte est un avantage pour le travail prévu. Elle permettra d'évaluer la précision de la nouvelle méthode numérique qui sera expérimentée à travers non seulement l'estimation de l'écart entre la solution exacte et la solution numérique qui sera trouvée, mais aussi de procéder à des comparaisons graphiques de ces deux solutions.

La résolution de ce problème par la méthode numérique des volumes finis avec une grille adaptative de type mixte est composée de deux étapes :

- La discrétisation du problème selon la méthode des volumes finis proposée par J. A. Mackenzie,
- La détermination des nœuds mobiles selon le principe décrit et utilisé par H. TANG et T. TANG.

## 1.2. Discrétisation du problème selon la méthode des volumes finis proposée par J. A. Mackenzie

Le problème tel que présenté ci-dessus est sous sa forme eulérienne. Pour sa discrétisation selon le principe de la méthode des volumes finis avec une grille adaptative selon J. A. Mackenzie, il convient de substituer cette forme du problème par sa forme lagrangienne équivalente.

### 1.2.1. Forme lagrangienne du problème

En effet, si  $\frac{\partial U}{\partial t}$  désigne la dérivée partielle de  $U(t, x)$  par rapport à la variable  $t$  au sens de Euler et  $\frac{DU}{Dt}$  désigne la dérivée partielle de  $U(t, x)$  par rapport à la variable  $t$  au sens de Lagrange, alors :

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{DU}{Dt} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (04)$$

Cette considération de la dérivée partielle par rapport à la variable  $t$  au sens de Lagrange permet une meilleure prise en compte de la dépendance de la variable  $x$  de  $t$ .

La forme lagrangienne, (BLOM et al 1988), équivalente du problème est alors obtenue en substituant (04) dans (01):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f(U(t,x))}{\partial x} = 0 \quad (05)$$

avec  $\frac{\partial U}{\partial t}$  est au sens de Lagrange.

### 1.2.2. Discrétisation de l'EDPs du problème

Pour la suite, considérons la forme différentielle  $w$  définie dans la base  $(dx, dt)$  par :

$$w = -Udx + f(U)dt \quad (06)$$

Sa dérivée extérieure notée  $dw$  est par conséquent définie par :

$$dw = -\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} dt \wedge dx - \frac{\partial f(U(t,x))}{\partial x} dx \wedge dx = \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} dt \wedge dx + \frac{\partial f(U(t,x))}{\partial x} dx \wedge dt \quad (07)$$

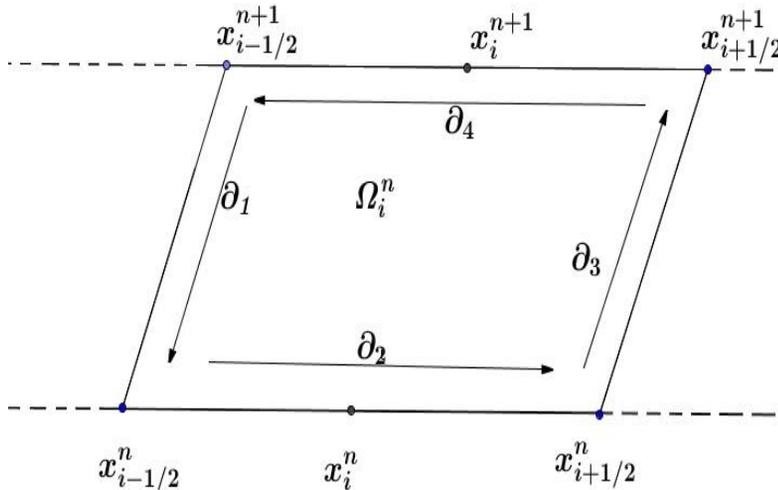
D'après le théorème de Green-Riemann, (ROYER, 2016) :

$$\iint_{\Omega} dw = \oint_{\partial\Omega} w \Leftrightarrow \iint_{\Omega} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(U(t, x))}{\partial x} dxdt = \oint_{\partial\Omega} (-Udx + f(U)dt) \quad (08)$$

Pour obtenir le schéma numérique de type volume finis de la discrétisation de l'EDP du problème, nous approchons (09) à l'aide de la méthode de quadrature numérique suggérée par J. A. Mackenzie

$$\oint_{\partial\Omega} (-Udx + f(U)dt) \quad (09)$$

**Figure 1** : Positions des nœuds selon le principe de la méthode des volumes finis



Selon la méthode des volumes finis, la discrétisation du domaine  $\Omega$  définit des volumes élémentaires pouvant être notés  $\Omega_i^n$  et caractérisé graphiquement par la figure 1 de telle sorte que  $\Omega = \cup \Omega_i^n$  où  $x_i^n$  et  $x_i^{n+1}$  désignent respectivement les positions occupées par l'abscisse  $x_i$ , pour  $i = 1:N$ , aux instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . Les nœuds  $x_{1-\frac{1}{2}}^n$  et  $x_{N+\frac{1}{2}}^{n+1}$  étant respectivement les bornes 0 et 1 de l'intervalle d'espace  $[0, 1]$ . Conformément à cette représentation:  $\partial\Omega_i^n = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \partial_4$ .

Le sens du parcourt de  $\partial\Omega_i^n$  étant celui du cercle trigonométrique, comme indiqué sur la figure par les flèches. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (-Udx + f(U)dt) \\ = \int_{\partial_1} (-Udx + f(U)dt) + \int_{\partial_2} -Udx + f(U)dt + \int_{\partial_3} -Udx + f(U)dt \\ + \int_{\partial_4} -Udx + f(U)dt. \end{aligned} \quad (10)$$

- La variable temps  $t$  est constante sur  $\partial_2$  et  $\partial_4$  et elle est respectivement égale à  $t^n$  et à  $t^{n+1}$ . Ainsi, l'utilisation de la méthode de quadrature des rectangles du point médian donne :

$$\int_{\partial_2} -Udx + f(U)dt = \int_{\partial_2} -Udx \approx -U_i^n \left( x_{i+\frac{1}{2}}^n - x_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (11)$$

les extrémités de  $\partial_2$  étant  $x_{i-\frac{1}{2}}^n$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$  et son point médian est  $x_i^n$ .

$$\int_{\partial_4} -Udx + f(U)dt = \int_{\partial_4} -Udx \approx -U_i^{n+1} \left( x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \quad (12)$$

les extrémités de  $\partial_4$  étant  $x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$  et son point médian est  $x_i^{n+1}$ .

- La variable temps  $t$  varie de  $t^n$  à  $t^{n+1}$  sur  $\partial_1$  et sur  $\partial_3$ , ainsi :

- l'utilisation de la méthode de quadrature des rectangles à droite donne :

$$\int_{\partial_1} -Udx + f(U)dt \approx - \left( \Delta t f_{i-1/2}^{n+1} - U_{i-1/2}^{n+1} (x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^n) \right), \quad (13)$$

Les extrémités de  $\partial_1$  étant  $x_{i-\frac{1}{2}}^n$  et  $x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ .

- L'utilisation de la méthode de quadrature des rectangles à gauche pour l'approximation de la même intégrale donne :

$$\int_{\partial_3} -Udx + f(U)dt \approx - \left( \Delta t f_{i-1/2}^n - U_{i-1/2}^n (x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) \quad (14)$$

Les extrémités de  $\partial_3$  étant  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ .

A l'aide de (13) et (14) et en s'inspirant de la définition paramétrée d'un intervalle, l'approximation définitive de (09) est faite par le schéma numérique (15).

$$\int_{\partial_1} -Udx + f(U)dt \approx -\theta \left( \Delta t f_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) - (1-\theta) \left( \Delta t f_{i-1/2}^n - U_{i-1/2}^n (x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^n) \right). \quad (15)$$

où  $f_{i-1/2}^{n+1} = f(U_{i-1/2}^{n+1})$ ;  $U_{i-1/2}^{n+1} = U(t^{n+1}, x_{i-1/2}^{n+1})$  et  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

- La même démarche permet d'établir que :

$$\int_{\theta_3} -U dx + f(U) dt \approx \theta \left( \Delta t f_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1} (x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}^n) \right) + (1 - \theta) \left( \Delta t f_{i+1/2}^n - U_{i+1/2}^n (x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}^n) \right). \quad (16)$$

où  $f_{i+1/2}^{n+1} = f(U_{i+1/2}^{n+1})$ ;  $U_{i+1/2}^{n+1} = U(t^{n+1}, x_{i+1/2}^{n+1})$ .

En somme, (MACKENZIE, 1996), d'après (11), (12), (15) et (16) :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i-1/2}^{n+1}} \left[ \left( x_{i+1/2}^n - x_{i-1/2}^n \right) U_i^n + \theta \left( \Delta t (f_{i-1/2}^{n+1} - f_{i+1/2}^{n+1}) - U_{i-1/2}^{n+1} (x_{i-1/2}^{n+1} - x_{i-1/2}^n) + U_{i+1/2}^{n+1} (x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}^n) \right) + (1 - \theta) \left( \Delta t (f_{i-1/2}^n - f_{i+1/2}^n) - U_{i-1/2}^n (x_{i-1/2}^{n+1} - x_{i-1/2}^n) + U_{i+1/2}^n (x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}^n) \right) \right]. \quad (17)$$

### 1.3. Mouvement des nœuds mobiles selon H. TANG et T. TANG

Il n'y a pas qu'une seule possibilité de définir le mouvement intelligent des nœuds. En effet, celle utilisée à la suite de la discrétion de l'EDP du problème ci-dessus n'est pas la même que celle utilisée par HUAZHONG TANG et TAO TANG. Celle utilisée par J. A. Mackenzie est inspirée d'une idée décrite par (BOOR, 1974). Celle que nous avons utilisée a été déjà décrite et utilisée par H. TANG et T. TANG (2003). Nous avons opté pour ce choix pour une raison de curiosité et par le fait que nous avons déjà expérimenté cette méthode dans nos travaux précédents dans lesquels les formes eulériennes des problèmes étudiés ont été conservées. Le but principal de ces choix étant de cerner la place et le rôle de chacune des notions qui interviennent dans cette nouvelle stratégie de résolution numérique des problèmes avec EDPs. N'étant pas concepteur de ces nouvelles méthodes, nos travaux constituent surtout des expériences qui vont nous assurer une bonne maîtrise de celles-ci. L'objectif du mouvement des nœuds est d'assurer une raréfaction des nœuds dans les zones où la solution est assez régulière contre une massification des nœuds dans les zones du domaine d'espace de la résolution où la solution du problème développe des propriétés difficiles à approcher numériquement, notamment des fronts raides. Une situation qui contraint à utiliser un pas de discrétisation extrêmement fin. Lorsque les nœuds sont statiques, une des conséquences immédiates est l'utilisation d'un grand nombre de nœuds, ce qui va générer un très grand nombre d'information à gérer lors des calculs. Malgré les capacités impressionnantes des ordinateurs de nos jours, il est très fréquent d'être confronté à une insuffisance de capacité de ces ordinateurs à gérer ces informations. Ces situations sont beaucoup répandues lorsque le domaine d'espace est de dimension supérieure à 1. La nouvelle approche que nous expérimentons dans le présent document est une alternative pour plus de possibilité avec les mêmes ordinateurs. La modélisation du

problème du mouvement des nœuds conduit à un problème mathématique différentiel. Sa résolution permet de calculer à chaque instant, la position des nœuds issus d'une discrétisation initiale du domaine d'espace. La répartition des nœuds à chaque instant est gouvernée par le principe de l'équidistribution, qui stipule que :

Si  $\pi^n = \{a = x_1^n < x_2^n < \dots < x_i^n < \dots < x_N^n = b\}$  est l'ensemble des nœuds issus de la discrétisation du domaine d'espace  $[a, b]$  à l'instant  $t = t^n$ , alors :

$$\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} M(U(t^n, x)) dx = \frac{1}{N} \int_a^b M(U(t^n, x)) dx, \quad 0 \leq i \leq N - 1, \quad (18)$$

Où  $M$  est une fonction moniteur pouvant être définie par :

$$M(t, x) = \sqrt{1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2}, \quad (19)$$

Ce qui conduit après discrétisation à :

$$M_{i-\frac{1}{2}}^n = \sqrt{1 + \alpha^2 \left( \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{x_i^n - x_{i-1}^n} \right)^2}, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (20)$$

En général  $\alpha \gg 1$ , (MACKENZIE, 1996), est un paramètre qui permet de réguler les trajectoires des nœuds, il est géré de façon manuelle. D'autres propositions de définition de la fonction moniteur existent impliquant une gestion automatique du paramètre  $\alpha$ . Une utilisation directe de (20) dans le calcul des positions des nœuds conduit souvent à une oscillation des trajectoires. Pour éviter une telle situation, il est recommandé de procéder à une régularisation de celle-ci. Il existe également plus d'une manière de le faire. Il y a au moins celle proposée par H. TANG et T. TANG que nous avons expérimenté dans nos précédents travaux et celle proposée par Dorfi et Drury (1987) que nous utilisons pour la première fois ici. Il s'agit de remplacer  $M_{i-\frac{1}{2}}^n$  par :

$$\tilde{M}_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{\sum_{k=i-p}^{i+p} M_{k+\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{|k-i|}}{\sum_{k=i-p}^{i+p} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{|k-i|}} \quad (21)$$

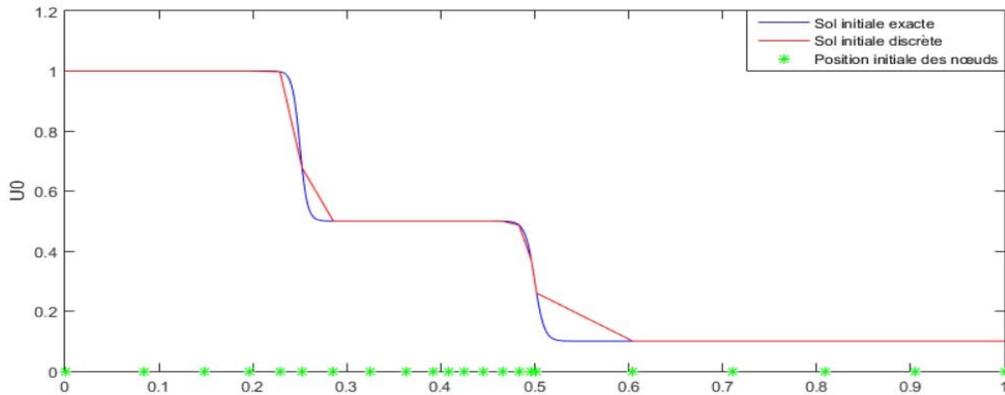
Où  $\gamma > 0$  est un autre paramètre de modération et  $p$  indique le nombre de nœuds qui interviennent dans le processus de régularisation des trajectoires des nœuds à travers la fonction moniteur. Enfin, la position des nœuds à chaque instant  $t^n$  est déterminée par le schéma numérique (22), (TANG T., 1991). Il existe également d'autres formes de schémas numériques pour déterminer ces positions, H. TANG et T. TANG (2003).

$$x_i^{n+1} = \frac{\tilde{M}_{i-\frac{1}{2}}^n x_{i-1}^{n+1} + \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}}^n x_{i+1}^n}{\tilde{M}_{i-\frac{1}{2}}^n + \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}}^n} \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (22)$$

## 2- Résultats et interprétations

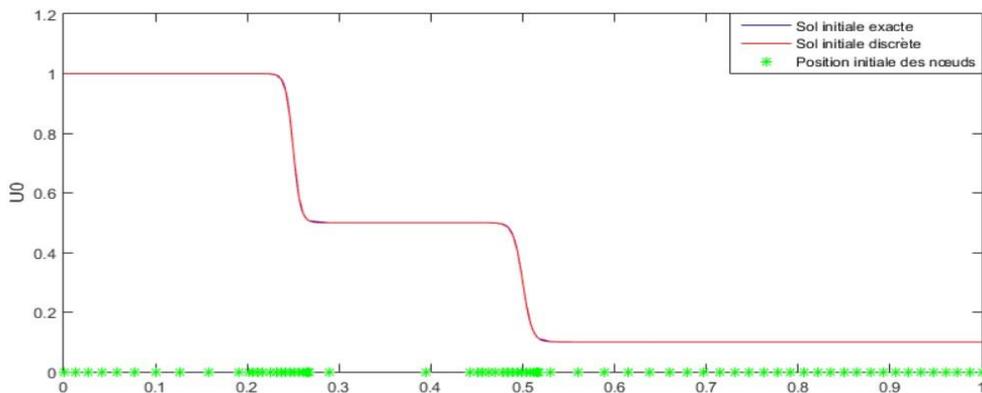
### 2.1. Approximation de la solution initiale

La solution initiale du problème test est définie par (02). Selon sa représentation graphique à travers les figures 2, 3 et 4, il ressort que celle-ci possède deux (02) fronts raids localisés sur l'intervalle  $[0,2 ; 0,5]$ . Une approximation de cette solution en utilisation de nœuds adaptatifs est alors plus appropriée. En observant (18) et (19) nous appréhendons mieux la logique qui justifie la raréfaction et la massification des nœuds selon la régularité de la solution. En effet, dans une zone où la solution  $U(t, x)$  du problème connaîtra de grandes variations, les valeurs de la fonction moniteur, qui dépend de ces variations, seront également élevées selon (19). Dans ce cas, la satisfaction de (18) nécessitera que  $x_{i+1}^n$  soit proche de  $x_i^n$  et c'est ce qui est confirmée sur la figure 2. Cette figure permet la comparaison graphique de la solution initiale exacte, en bleue, et la solution initiale numérique, en rouge, déterminée par 22 nœuds mobiles. Etant donné que cette solution initiale possède deux fronts raids sur l'intervalle  $[0,2 ; 0,5]$ , la massification des nœuds, en vert, sur cet intervalle est par conséquent justifiée. En effet, 14 nœuds sur un total de 22 sont sur l'intervalle  $[0,2 ; 0,5]$ , qui ne représente que  $3/10$  de tout l'intervalle  $[0 ; 1]$ . La massification des nœuds sur l'intervalle  $[0,2 ; 0,5]$  permet d'atteindre un plus petit pas de discrétisation qui est  $h = 0,0057$ . Pour obtenir une solution numérique de même qualité de précision avec des nœuds statiques équidistants, le nombre de nœuds nécessaire est de  $N = \frac{1}{0,0057}$ , soit au moins 175. C'est-à-dire environ 8 fois le nombre de nœuds mobiles.



**Figure 2** : comparaison graphique de la solution initiale exacte et la solution initiale numérique déterminée par 22 nœuds mobiles

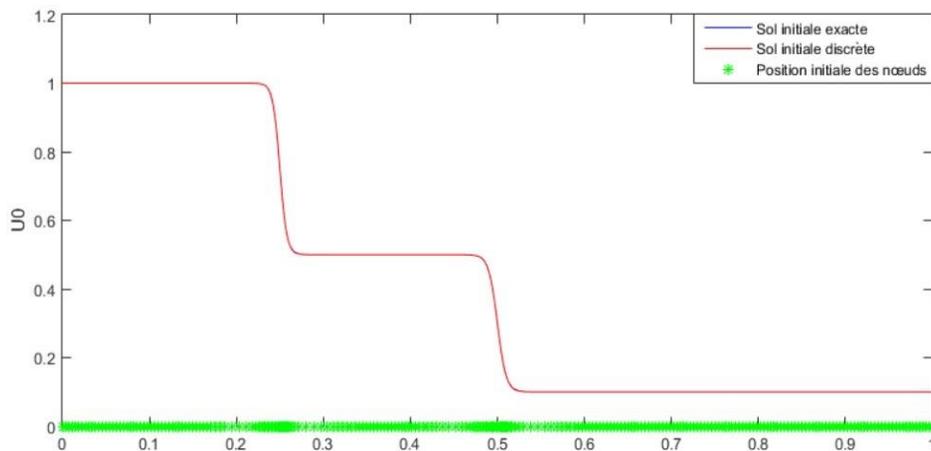
Pour une approximation efficace de cette solution initiale, comme sur la figure 3, il a fallu seulement 72 nœuds mobiles pour une massification des nœuds sur l'intervalle  $[0,2 ; 0,5]$  permettant d'atteindre un plus petit pas de discrétisation  $h = 0,001$ . Ce qui correspond à  $N = \frac{1}{0,001}$ , soit exactement 1000 nœuds statiques pour obtenir une solution numérique de même qualité. C'est à dire environ 13 fois le nombre de nœuds mobiles.



**Figure 3** : comparaison graphique de la solution initiale exacte et la solution initiale numérique déterminée par 72 nœuds mobiles

Les figures 2, 3 et 4 attestent que l'augmentation du nombre des nœuds, qui équivaut à la diminution du pas de discrétisation  $h$ , c'est-à-dire  $h \rightarrow 0$ , permet à la solution numérique d'évoluer vers la solution exacte en se superposant à celle-ci. Ce qui constitue la preuve numérique de la convergence de la méthode utilisée. (HUANG W.

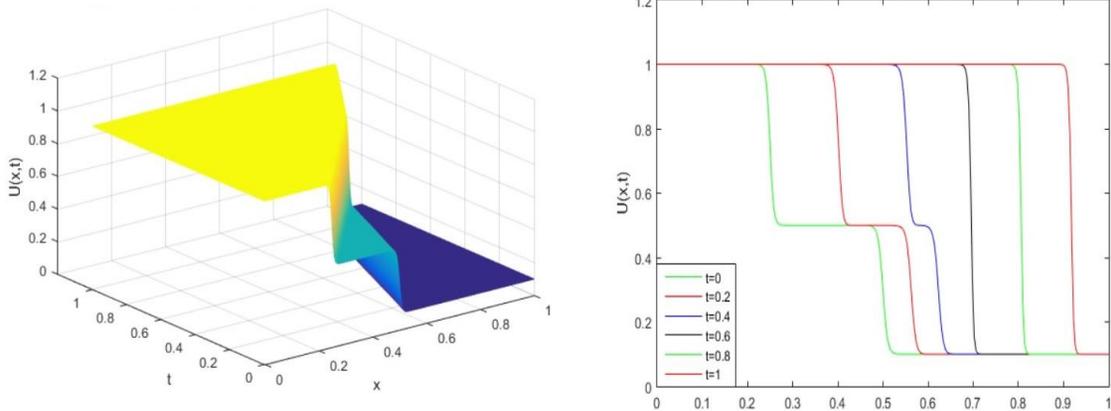
and RUSSELL, 2011) disaient qu'il n'existait toujours pas encore une théorie mathématique fondamentale qui permettait d'établir la convergence des méthodes numériques utilisées avec une grille adaptative, mais qu'ils ont l'espoir que cela ne durera plus longtemps. La nouvelle stratégie, qui est d'utiliser les méthodes numériques nécessitant une discrétisation du domaine de résolution, avec des nœuds mobiles se révèle par conséquent un outil pour améliorer la précision de la solution numérique, puisqu'elle offre plus de possibilité pour poursuivre l'augmentation du nombre de nœuds. Ainsi avec 102 nœuds mobiles, la nouvelle situation de la précision est fournie par la figure 4. Le plus petit pas de la discrétisation dans ce cas est  $h = 0,0007$ , ce qui équivaut à 1428 nœuds statiques équidistants pour obtenir une telle précision. Soit exactement 14 fois le nombre de nœuds mobiles.



**Figure 4 :** comparaison graphique de la solution initiale exacte et la solution initiale numérique déterminée par 102 nœuds mobiles

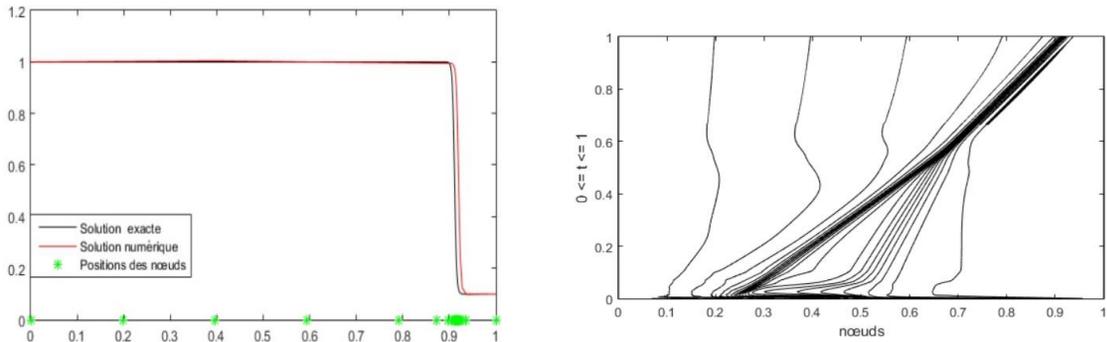
## 2.2. Approximation de la solution au terme du temps d'observation

La solution du problème de Burgers est une onde dont la forme initiale est fournie par les figures 2, 3 et 4 ci-dessus. Cette onde qui possède deux fronts raides, se propage de la gauche vers la droite sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  au cours du temps  $t \in [0 ; 1]$ . Pendant cette propagation elle se redresse et termine ainsi sa course avec un seul front beaucoup plus raide. Toutes les formes qu'elle a prises au cours de son mouvement sont consignées sur la figure 5 ci-dessous, à gauche en continu et à droite quelques sections à des instants précis.



**Figure 5 :** Solution exacte pour  $t \in [0 ; 1]$  et sections de la solution exacte aux instants  $t=0 ; t=0.2 ; t=0.4 ; t=0.6 ; t=0.8 ; t=1$

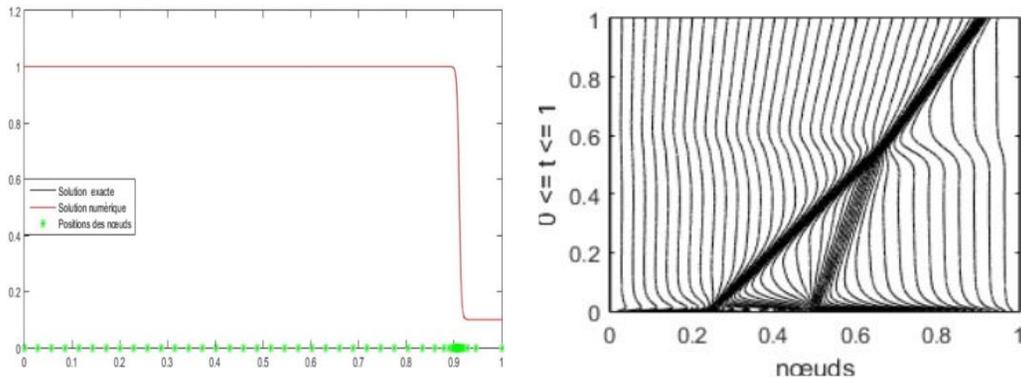
L'analyse faite précédemment sur la solution initiale est reprise sur la solution du problème à l'instant  $t = 1$ . La solution numérique a été calculée par le couplage des schémas (17) et (22) définissant ainsi le schéma numérique de la méthode des volumes finis avec une grille mobile adaptative souhaitée dans le cadre de cette étude. A chaque cas de comparaison, la figure illustrant les trajectoires empruntées par les nœuds est associée. Le but de ces illustrations est d'afficher l'évolution de la massification des nœuds suivant la progression des ou du front(s) raide(s) de la solution.



**Figure 6 :** Comparaison de la solution exacte et de la solution numérique à  $t=1$ , déterminée avec 22 nœuds mobiles et illustration graphique des trajectoires des 22 nœuds utilisés

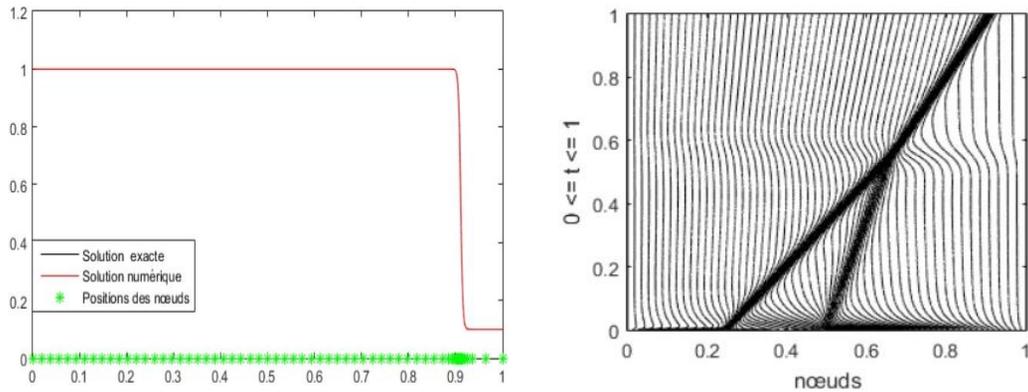
Les trajectoires des 22 nœuds employés retracent l'évolution des ou du front(s) raide(s) de la solution. Tandis que la comparaison graphique de la solution exacte et de la solution numérique à l'instant  $t = 1$  permet non seulement d'apprécier l'écart entre les deux solutions, mais aussi d'observer la massification des nœuds dans la zone où la solution développe un front raide. Cette massification permet de disposer d'un pas de

discrétisation extrêmement fin uniquement dans la zone concernée. Ce qui permet de réduire le nombre de nœuds nécessaire pour disposer d'un tel pas de discrétisation le long de tout le domaine. Par exemple, avec les 22 nœuds le plus petit pas obtenu est de  $h = 0,000871$ . Pour obtenir un tel pas et par conséquent la même qualité de la solution numérique (en rouge sur la figure 6) avec la méthode classique des volumes finis, c'est-à-dire avec une grille statique,  $N = \frac{1}{0,000871} = 1148$  nœuds étaient au moins nécessaires. Ce qui n'est pas sans conséquence sur les capacités des outils de calcul utilisés, notamment l'ordinateur. Etant attendu que l'écart entre la solution numérique et la solution exacte est toujours perceptible, il est nécessaire de faire tendre  $h$  davantage vers 0 et cela en augmentant le nombre de nœuds à 52 par exemple. Les points verts sur la figure à gauche, correspondent aux extrémités supérieures des trajectoires sur la figure à droite.



**Figure 7 :** Comparaison de la solution exacte et de la solution numérique à  $t=1$ , déterminée avec 52 nœuds mobiles et illustration graphique des trajectoires des 52 nœuds utilisés

Avec 52 nœuds mobiles on note une solution numérique plus proche de la solution exacte. L'écart entre les deux solutions n'est plus perceptible. Le plus petit pas atteint cette fois est de  $h = 0,000749$ . Avec la méthode classique des volumes finis, il fallait,  $N = \frac{1}{0,000749} = 1335$  nœuds statique pour une solution numérique de même qualité que celle obtenue par les 52 nœuds mobiles. Bien attendu qu'il est encore possible de poursuivre jusqu'à l'obtention d'une situation invariable quel que soit les efforts d'augmentation du nombre de nœuds, on peut déjà se contenter d'une solution numérique assez précise, mais calculer avec moins de 100 nœuds ce qui n'est pas possible avec la méthode des volumes finis classique.



**Figure 8 :** Comparaison de la solution exacte et de la solution numérique à  $t=1$ , déterminée avec 72 nœuds mobiles et illustration graphique des trajectoires des 72 nœuds utilisés

## Discussion

Le bilan des différents résultats présentés ci-dessus est consigné dans le tableau des statistiques suivant :

**Tableau 1 :** statistiques des simulations

Nombre de nœuds	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	$h_p$	$\Delta t$	<i>cpu.time</i>	<i>Nvfc</i>
N = 22	$6,6 \times 10^{-1}$	1,7065	$8,71 \times 10^{-4}$	$6,6 \times 10^{-4}$	1,70	1148
N = 52	$6,74 \times 10^{-4}$	0,1130	$7,49 \times 10^{-4}$	$2,8 \times 10^{-4}$	5,7	1335
N = 72	$5,71 \times 10^{-4}$	0,0726	$6,06 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-4}$	15,55	1666

Selon ces statistiques, lorsque le nombre de nœuds  $N$  augmente, le plus petit pas de la discrétisation  $h_p$  se rapproche davantage de 0 et l'écart entre la solution numérique et la solution exacte  $e$  tend également vers 0 en norme infinie comme en norme 2. Malheureusement cette augmentation du nombre de nœuds n'est pas sans conséquence sur le pas  $\Delta t$  de la discrétisation de l'intervalle du temps. Cette augmentation entraîne une diminution de  $\Delta t$ , ce qui augmente à son tour la durée du calcul par l'ordinateur, c'est-à-dire le "*cpu.time*". Des propositions pour une meilleure gestion de cette évolution de  $\Delta t$  existent et nous comptons examiner un cas concret dans ce sens les

jours à venir. En rappel, à travers cette expérience, l'objectif poursuivi est de mettre en évidence d'une manière beaucoup plus explicite les avantages de l'utilisation d'une grille adaptative en lieu et place d'une grille statique. Cette mise en valeur se concrétise à travers la comparaison de la première colonne et la dernière colonne du tableau. En effet, sur chacune des lignes, la première colonne indique le nombre de nœuds en grille mobile pour les éléments caractéristiques de la solution numérique évoqués sur les autres colonnes. Tandis que la dernière colonne fournit le nombre de nœuds "Nvfc" qu'il faut pour obtenir une solution numérique de mêmes caractéristiques avec une méthode classique utilisant des nœuds statiques.

## Conclusion

Au terme de ce travail, nous notifions la disponibilité dans le présent article, de la description de la démarche préconisée par J. A. Mackenzie pour établir le schéma numérique conformément au principe de la méthode des volumes finis pour la résolution d'un problème avec EDPs hyperbolique écrite sous forme conservative. La particularité de cette stratégie est qu'elle permet une prise en compte systématique de la forme Lagrangienne du problème. Cette dernière forme étant celle recommandée lorsque la discrétisation du domaine doit générer des nœuds mobiles adaptatifs, la méthode proposée par J. A. Mackenzie a bien plus d'avantage que la procédure classique d'établissement du schéma numérique de la méthode des volumes finis. Désormais, nous recommandons cette méthode car en plus, elle permet d'éviter le problème du choix de la méthode d'approximation du flux numérique que connaît la démarche classique pour établir le schéma numérique de la méthode des volumes finis. Enfin, l'expérience menée a également permis de mettre en évidence, le gain en termes de coût, dans le traitement informatique des données engendrées lors de la résolution numérique d'un problème à l'aide d'une méthode numérique employée avec une grille mobile. Cela permet d'obtenir des solutions numériques efficaces même avec des ordinateurs peu puissants.

## Références bibliographiques :

- ALLAIRE G., 2012. Analyse numérique et Optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Ecole Polytechnique, Paris, France, 481 p.
- BENTON E. R. and PLATZMAN G. W., 1972. A table of solutions of the One-Dimensional Burgers Equation. *Quart. Appl. Math.*, (30) : 195-212.

BLOM J. G., SANZ-SERNA J. M. and VERWER J. G., 1988. On simple moving grid methods for one-dimensional evolutionary partial differential equations. *Journal of computational physics*, (74) : 191-213.

BOOR de C., 1974. Good approximation by splines with variables knots II. *In lecture Notes in mathematics*, (363) : 12-20.

DORFI E. A. and DRURY L. O., 1987. Simple adaptive grids for 1-D initial value problems. *Journal of Computational Physics*, (69) : 175-195.

HUANG W. and RUSSELL R. D., 2011. Adaptive moving mesh methods. Springer, New York, USA, 432p.

LAMIEN K., 2017. Résolution numérique de quelques lois de conservation hyperboliques par la méthode de grille mobile sous la méthode des volumes finis. Thèse de doctorat unique, option mathématiques appliquées, spécialité analyse numérique et Simulation, UFR/SEA, Université Ouaga 1 Pr Joseph KI-ZERBO, Burkina Faso. 131 p.

LAMIEN K., SOME L. and OUEDRAOGO M., 2020. Using an adaptive mesh high-order finite volume method to solve three hyperbolic Conservation laws with diffusion or source term, *Annales Mathématiques Africaines*, (8) : 113-124.

MACKENZIE J. A., 1996. Moving Mesh Finite Volume Methods for One-dimensional Evolutionary Partial Diierential Equations. University of Strathclyde Livingdstone Tower, Glasgow, Ecosse, 26 p.

ROYER J., 2016. Calcul différentiel et intégral : théorème de Poincaré - Formule de Green-Riemann. Université Toulouse 3, Toulouse, France, 88 p.

SOME L., 2007. Méthode de grille mobile sous la méthode des lignes pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles modélisant des phénomènes évolutifs. Thèse de doctorat unique, option mathématiques appliquées, spécialité analyse numérique et informatique, UFR/SEA, Université de Ouagadougou, Burkina Faso. 161p.

TANG H. and TANG T., 2003. Adaptive mesh methods for one- and two-dimensional hyperbolic conservation laws. *SIAM J. NUMER. ANAL*, (2) : 487-515.