

# Quantification des paradoxes de Borda : détermination d'un seuil minimum de premières places pour garantir la victoire du gagnant de Condorcet

---

Kadigueta OUEDRAOGO<sup>1\*</sup>

## Résumé

Dans la théorie du choix social, les travaux de Borda, Condorcet, Arrow et Saari ont mis en lumière les défis liés à l'agrégation des préférences, notamment l'incapacité de la règle de Borda à toujours refléter la volonté de la majorité (le gagnant de Condorcet). Cet article analyse cette déconnexion en explorant les situations où le candidat préféré par la majorité des votants se retrouve avec un score de Borda minimal ou quasi-minimal. La contribution principale de cet article est d'ordre analytique. Si la littérature documente l'existence de ces paradoxes, elle manque d'une condition quantifiée générale qui assure la convergence des deux règles, quel que soit le nombre d'options ( $m$ ). En utilisant une approche de démonstration mathématique et d'analyse des profils de préférences, nous déterminons un seuil précis. Nous établissons qu'un candidat doit être classé premier par une proportion de votants  $P$  telle que  $P > \frac{m-1}{m}$  pour être assuré de ne pas être le dernier selon la règle de Borda, où  $m$  est le nombre de candidats. Cette condition fournit un seuil analytique garantissant la robustesse de la règle de Borda face à la majorité des votants. Ce seuil minimum démontre que plus le nombre d'options augmente, plus il est difficile de garantir que le gagnant de Condorcet soit également sélectionné par la règle de Borda, nécessitant un niveau de consensus majoritaire de plus en plus élevé.

**Mots-clés :** Règle de Borda, Gagnant de Condorcet, Seuil d'élection, Choix social, Robustesse- Paradoxe

## Quantification of Borda's paradoxes: determination of a minimum threshold of first places to guarantee the victory of the Condorcet winner

### Abstract

In social choice theory, the works of Borda, Condorcet, Arrow, and Saari have highlighted the challenges associated with preference aggregation, notably the Borda

---

<sup>1</sup> Docteur en Economie, Chercheur au CEDRES (Centre d'Études, de Documentation et de Recherche Économique et Social), Membre (associé) de l'équipe de recherche QGPE (Questions Globales de Politiques Économiques)

**Auteur correspondant :** Kadigueta OUEDRAOGO. Email : [ouedraogokadigueta@gmail.com](mailto:ouedraogokadigueta@gmail.com). Tél : +226 01 75 11 61

DOI : <https://doi.org/10.64707/revstlsh.v41i2.1899>

rule's inability to always reflect the majority will (the Condorcet winner). This article analyzes this disconnection by exploring situations where the candidate preferred by the majority of voters ends up with a minimal or quasi-minimal Borda score. The main contribution of this article is analytical. While the literature documents the existence of these paradoxes, it lacks a general quantified condition that ensures the convergence of the two rules, regardless of the number of options ( $m$ ). Using a mathematical demonstration approach and analysis of preference profiles, we determine a precise threshold. We establish that a candidate must be ranked first by a proportion of voters  $P$  such that  $P > \frac{m-1}{m}$  to be guaranteed not to be ranked last according to the Borda rule, where  $m$  is the number of candidates. This condition provides an analytical threshold guaranteeing the robustness of the Borda rule against the majority of voters. This minimum threshold demonstrates that the greater the number of options, the more difficult it is to guarantee that the Condorcet winner is also selected by the Borda rule, requiring an increasingly high level of majority consensus.

**Key-words:** Borda Rule, Condorcet Winner, Election Threshold, Social Choice, Robustness, Paradox

**Codes JEL:** D71, D70

## 1. Introduction

Le choix d'une règle d'agrégation des préférences individuelles en décision collective est un enjeu fondamental de la théorie économique et politique. Depuis les travaux pionniers de (Borda, 1781) et (Condorcet, 1785), la recherche s'est concentrée sur la découverte de procédures capables de traduire fidèlement la volonté sociale. Bien que le théorème d'impossibilité d'Arrow (Arrow, 1951) et les travaux sur la manipulation stratégique (Gibbard, 1973 ; Satterthwaite, 1975) aient établi qu'aucune règle n'est exempte de failles, le débat reste vif sur la capacité des méthodes de vote à respecter le principe de majorité. Au cœur de ce débat se trouve la tension entre la règle de Borda, appréciée pour sa prise en compte de l'intensité des préférences, et le critère de Condorcet, qui privilégie le candidat battant tous les autres en duels binaires. La règle de Borda est notoirement mise en défaut par ce critère : un candidat plébiscité par la majorité absolue (gagnant de Condorcet) peut se retrouver avec un score de Borda minimal, voire le plus faible. Ce paradoxe soulève une question fondamentale de fiabilité : quel niveau de soutien majoritaire est réellement nécessaire pour s'assurer que le choix de la majorité ne soit pas rejeté par la règle de Borda ? Si la littérature existante décrit avec précision l'existence de ces situations contre-intuitives, elle demeure principalement descriptive. Il existe une lacune significative concernant l'établissement d'une condition générale et quantifiée permettant de garantir la robustesse de la règle de Borda

face au principe de majorité quel que soit le nombre d'options ( $m$ ) en présence. Le présent article comble cette lacune en proposant une quantification analytique de ce paradoxe. Notre contribution majeure est la détermination d'un seuil minimal de suffrages de premier rang, noté ( $P$ ), qui garantit l'alignement des deux règles. Nous démontrons que pour être assuré d'éviter une position de rejet selon Borda, un candidat doit recueillir une proportion de premières places supérieure à un seuil défini par le nombre de candidats. L'analyse de ce seuil révèle une implication critique : plus le nombre d'options augmente, plus la règle de Borda exige un consensus majoritaire quasi-total pour rester fidèle au principe de Condorcet.

Le reste de l'article est organisé comme suit. La Section 2 présente les concepts de base et les notations utilisées. La Section 3 expose le fonctionnement de la règle de Borda et analyse, à travers divers exemples, les situations où elle produit des résultats contre-intuitifs (Section 4). La Section 5 est dédiée à la détermination et à la démonstration de la Proposition 4 ainsi qu'à la discussion de ses implications.

## **2. Concepts de base et notations**

Cette section introduit les notions fondamentales de la théorie du choix social nécessaires à la compréhension de l'analyse, ainsi que les notations mathématiques utilisées tout au long de l'article.

### **2.1 Agrégation des préférences individuelles en préférence collective**

Le point de départ de la théorie du choix social est le problème de l'agrégation des préférences individuelles. Il s'agit de trouver une méthode rationnelle et équitable pour transformer les classements de chaque électeur sur un ensemble d'options en un classement unique et cohérent pour la collectivité. Ce processus d'agrégation repose sur des règles de vote qui, idéalement, devraient satisfaire un ensemble d'axiomes fondamentaux. Ces axiomes comprennent notamment l'universalité (ou axiome du domaine universel) selon lequel la règle d'agrégation doit pouvoir traiter tous les profils de préférences possibles sans restriction. En d'autres termes, elle doit être capable de produire un classement social unique, quelle que soit la façon dont les individus ont classé les options ; l'axiome de l'unanimité (Pareto) selon lequel si tous les individus préfèrent l'option  $A$  à l'option  $B$ , alors la société doit préférer  $A$  à  $B$  ; l'axiome de l'indépendance des options non pertinentes qui stipule le classement social entre  $A$  et  $B$  ne doit dépendre que de la

façon dont les individus classent  $A$  et  $B$  (sans être affecté par l'introduction d'une troisième option  $C$ ); l'axiome d'absence de dictature selon lequel le classement social n'est pas déterminé uniquement par les préférences d'un seul individu. L'analyse de ces quatre propriétés a donné lieu au théorème d'impossibilité d'Arrow (1951) (Arrow, 1951). Ce théorème démontre qu'aucune règle d'agrégation ne peut satisfaire simultanément les axiomes d'universalité, d'unanimité, d'indépendance des options non pertinentes et d'absence de dictature. La seule règle qui pourrait satisfaire les trois premiers axiomes est la Dictature, ce qui est socialement inacceptable. Cette impossibilité théorique justifie l'étude rigoureuse des propriétés spécifiques de chaque règle de vote, comme la règle de Borda, dont les failles et les forces doivent être rigoureusement quantifiées.

## 2.2 Espace des choix et des votants

Intuitivement il est à considérer que les préférences des agents portent sur des options. Ces options peuvent être des candidats à une élection, des états sociaux ou des allocations dans une économie. Nous utilisons le plus souvent le terme candidat ou option, mais nous ne perdons pas de vue le caractère général de l'analyse.

Soit  $M$  l'ensemble des  $m$  options ou candidats en présence, avec  $|M| = m$ . Soit  $N$  l'ensemble des votants, avec  $|N| = n$ . Chaque votant  $i \in N$  établit un ordre de préférence total, noté  $R_i$ , sur l'ensemble  $M$ . un profil de préférence est la collection de ces ordres pour l'ensemble des votants, noté  $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ .

## 2.3 La règle de Borda et les règles positionnelles

La règle de Borda appartient à la famille des règles positionnelles (ou scoring rules). Ces règles sont définies par un vecteur de score  $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ , où  $S_1$  est le score attribué au candidat classé premier,  $S_2$  au candidat classé deuxième, et ainsi de suite.

La règle de Borda est le cas spécifique où le vecteur de score est linéaire et décroissant :

$$S_B = (m - 1, m - 2, \dots, 1, 0)$$

Pour un candidat  $x \in M$ , le score de Borda ( $B(x)$ ) est calculé comme la somme des points attribués par tous les votants :

$$B(x) = \sum_{i=1}^n (m - r_i(x))$$

Où  $r_i(x)$  est le rang attribué au candidat  $x$  par le votant  $i$ . le gagnant de Borda est l'option  $x$  qui maximise ce score  $B(x)$ .

La règle de Borda est unique au sein des règles positionnelles pour sa satisfaction des axiomes de cohérence et de neutralité (Young, 1975) . Son analyse approfondie est justifiée par cette unicité et par sa capacité à tenir compte de l'intensité relative des préférences, un sujet d'intérêt croissant (Maskin, 2025).

## 2.4 Le critère de Condorcet et le gagnant de Condorcet

Le critère de Condorcet (Condorcet, 1785) est un principe de majorité absolue. Un candidat  $C \in M$  est appelé Gagnant de Condorcet s'il bat toute autre option  $x \in M \setminus \{C\}$  dans un vote par paires à la majorité simple. La condition de Condorcet est remplie si :

$$x \in M \setminus \{C\}, |\{i \in N: C \text{ est préféré à } x \text{ par } i\}| > \frac{n}{2}$$

## 2.5 Notation spécifiques à l'analyse de seuil

Pour l'établissement de notre condition analytique dans la Section 5, nous introduisons les notations suivantes :

$N_C$  : Le nombre de votants qui classent le Gagnant de Condorcet (C) en première position.

P : La proportion de votants qui classent C en première position, définie par :

$$P = \frac{N_C}{n}$$

où  $n$  est le nombre total de votants. Cette proportion P est l'élément clé de notre condition analytique  $\frac{m-1}{m}$  garantissant la non-sanction du gagnant de Condorcet par la règle de Borda.

## 3. Illustration du fonctionnement de la règle de Borda

Comme défini en section 2.3, la règle de Borda est une méthode positionnelle qui pondère les préférences en attribuant un score décroissant aux options selon leur rang. Ce score capture l'intensité relative des préférences individuelles, ce qui est son principal atout. La simplicité du calcul des scores de Borda permet de garantir un résultat complet (un classement de toutes les options) et transitive. Il est néanmoins essentiel de comprendre comment ce calcul s'articule pour introduire les situations dans lesquelles il diverge du principe de majorité.

### 3.1 Exemple de calcul et détermination du vainqueur

L'analyse de la règle de Borda passe par la compréhension du calcul de son score :

$$B(x) = \sum_{i=1}^n (m - r_i(x)).$$

Considérons un profil de préférences simple avec  $m=3$  options (A, B, C) et  $n=6$  votants, représenté par les ordres de classement suivants :

	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	
<b>2</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	
<b>1</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	
<b>0</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	

Pour  $m=3$ , le vecteur score est  $(2,1,0)$ . Les scores de Borda  $B(x)$  pour chaque candidat sont calculés comme suit :

$$B(A)=3 \times 2 + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 7$$

$$B(B)=3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 0 = 7$$

$$B(C)=3 \times 0 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 4$$

Dans cet exemple, A et B sont vainqueurs *ex-aequo* selon la règle de Borda avec un score de 7.

L'étude des scores de Borda se concentre ensuite sur les bornes que ces scores peuvent atteindre. C'est l'analyse de ces bornes (le score maximal et le score minimal) qui permet d'identifier les profils de préférences susceptibles de générer des résultats contre-intuitifs. La prochaine section se concentre sur les cas où le score de Borda conduit à des résultats aberrants par rapport au principe de majorité.

### 3.2 Bornes du score de Borda

Après avoir illustré le calcul du score de Borda, il est essentiel de définir l'intervalle dans lequel ce score peut varier. L'analyse des bornes est le fondement de la proposition 4, car elle permet de déterminer le score minimal théorique qu'un candidat peut atteindre.

Pour un ensemble de  $m$  options et  $n$  votants, le score de Borda  $B(x)$  pour n'importe quel candidat  $x$  est borné par les valeurs minimales et maximales suivantes :

1. *Score Maximal* ( $B_{max}$ ):

e score maximal est atteint si le candidat nest classé premier par tous les

$$B_{max=n(m-1)}$$

2. Score minimal ( $B_{min}$ ):

Le score minimal est atteint si le candidat est classé dernier par tous les

$$B_{min} = nx0 = 0$$

Ainsi, le score de Borda d'un candidat x est toujours inclus dans l'intervalle :

$$0 \leq B(x) \leq n(m - 1)$$

Le point crucial de notre analyse réside dans l'étude des profils de préférence qui placent le gagnant de Condorcet à proximité de cette borne minimale  $B_{min} = 0$ . La Section 4 utilisera ce cadre pour illustrer les cas de paradoxe, tandis que la Section 5 déterminera la condition minimale (Proposition 4) sous laquelle le gagnant de Condorcet peut être garanti de dépasser ce seuil minimal.

## 4. Analyse des profils de préférences et des scores de Borda contre-intuitifs

Cette section illustre l'écart entre le score de Borda et la volonté majoritaire, un phénomène connu sous le nom de paradoxe de Borda. Nous nous concentrons sur les profils de préférences qui placent le Gagnant de Condorcet (C) dans la position la plus défavorable, justifiant ainsi la nécessité d'établir une condition analytique garantissant sa robustesse.

### 4.1 Le paradoxe classique : divergence entre Borda et Condorcet

Le paradoxe le plus sévère se produit lorsque le Gagnant de Condorcet (C) est classé avec le 2<sup>ème</sup> score le plus bas par la règle de Borda (Saari, 2001). Considérons un exemple avec  $m=4$  options (A,B,C,D) et  $n=100$  votants. Le vecteur de score de Borda est (3,2,1,0).

	51	49
3	A	B
2	B	C
1	C	D
0	D	A

### Détermination du gagnant de Condorcet :

L'option A est le gagnant de Condorcet, car elle bat toutes les autres options dans tous les duels majoritaires.

### Calcul des Scores de Borda :

- **Score de A** :  $(51 \times 3) + (49 \times 0) = 158$
- **Score de B** :  $(51 \times 2) + (49 \times 3) = 249$
- **Score de C** :  $(51 \times 1) + (49 \times 2) = 149$
- **Score de D** :  $(51 \times 0) + (49 \times 1) = 49$

Malgré son statut de Gagnant de Condorcet (choix majoritaire incontestable), A est classé *deuxième* selon la règle de Borda, tandis que B est élu Gagnant de Borda avec le score de 249.

### 4.2 Le cas extrême : score de Borda quasi-minimal pour le gagnant de Condorcet

Le cas le plus extrême du paradoxe de Borda-Condorcet ne se produit pas lorsque le gagnant de Condorcet (C) est classé dernier, mais lorsqu'il est classé avant-dernier (avec le score le plus bas parmi les non-derniers), comme l'a démontré Saari (D. G. Saari, 1995, 2001).

Le score de Borda minimal théoriquement possible est  $B_{min} = 0$  (si un candidat est classé dernier par tous les votants). Cependant, les travaux en théorie du choix social ont démontré qu'un gagnant de Condorcet (C) ne peut jamais recevoir ce score minimal (D. G. Saari, 1995, 2001). Sa victoire majoritaire contre toute autre option garantit un score de Borda strictement supérieur. L'intérêt de la littérature se porte sur la position la plus basse qu'un gagnant de Condorcet peut atteindre. Les travaux de Saari ont montré que de tels profils existent et peuvent être générés par des cycles de préférences, plaçant le score de A à l'extrémité inférieure de l'intervalle  $[0, n(n-1)]$  tout en lui conservant sa victoire majoritaire. L'analyse de ces profils est essentielle, car elle établit la limite de fiabilité de la règle de Borda : jusqu'où le gagnant de Condorcet peut-il descendre ?

Si l'existence du paradoxe (non-convergence des deux règles) est avérée, la question n'est plus de savoir s'il existe, mais de déterminer la condition analytique et quantifiée sous laquelle le gagnant de Condorcet

ne peut pas être "trop" perdant (c'est-à-dire, classé avant-dernier ou en deçà d'une certaine borne).

Les Propositions 1, 2 et 3 établissent les bornes minimales des scores de Borda non nulles pour le gagnant de Condorcet, qui sont ensuite utilisées dans la Section 5 pour dériver le seuil de suffrages de première place nécessaire pour garantir la robustesse de la règle.

## 5. Quantification analytique et résultats principaux

### 5.1. Établissement des Bornes Minimales du Score de Borda

Cette sous-section sert à établir les bornes analytiques utilisées pour la démonstration de la Proposition 4. Bien que le Gagnant de Condorcet (C) ne puisse jamais être classé dernier selon Borda, la littérature (Saari, 2001) montre qu'il peut être classé avant-dernier (avec le score le plus bas parmi les candidats non-derniers). Notre objectif est de dériver la condition minimale pour garantir que C ne soit pas sanctionné à cette position critique (avant-dernière place) et, plus rigoureusement, pour garantir sa victoire ( $B(c) \rightarrow B(x)$ ). Les bornes présentées ci-après sont les outils analytiques qui quantifient cet écart

#### 5.1.1. Proposition 1 : Borne générale du score de Borda

**Proposition 1:** *soit  $x$  une option classée au moins  $k$  – ième par tous les  $n$  votants.*

*son score de Borda est borné par:  $B(x) \geq n(m - k)$*

Démonstration :

Si l'option  $x$  est classée au moins au rang  $k$  c'est-à-dire  $r_i(x) \leq k$ , le rang minimal qu'elle peut obtenir est  $k$ . Dans ce cas,  $x$  reçoit au moins  $m-k$  points de chaque votant  $i$ .

Le score de Borda est  $B(x) = \sum_{i=1}^n (m - r_i(x))$ .

Puisque  $r_i(x) \leq k$  pour tout  $i$ , alors  $-r_i(x) \geq -k$ .

Donc  $m - r_i(x) \geq m - k$

Par sommation sur tous les  $n$  votants :

$$B(x) = \sum_{i=1}^n (m - r_i(x)) \geq \sum_{i=1}^n (m - k) = n(m - k)$$

D'où :  $B(x) \geq n(m - k)$ . L'inégalité est au sens large ( $\geq$ ) pour inclure le cas où  $x$  est exactement classé  $k$ -ième par tous les votants.

### 5.1.2 Proposition 2 : Borne minimale du score de Borda d'un Gagnant de Condorcet

*Proposition 2: Soit  $C$  le gagnant de Condorcet, candidat classé premier par une proportion  $P$*

$$= \frac{N_C}{n} \text{ votants, son score de Borda est borné par:}$$

$$B(C) \geq N_C(m - 1) + (n - N_C)(m - 2)$$

#### Démonstration :

Le score de Borda du candidat  $C$ , noté  $B(C)$ , est la somme des points qui lui sont attribués par l'intégralité des  $n$  votants. Pour modéliser cette borne minimale de manière rigoureuse, nous divisons la population électorale en deux groupes distincts :

**1. Le groupe des partisans ( $N_C$  votants) :** ces électeurs placent le candidat  $C$  au premier rang de leurs préférences. Selon la pondération de la règle de Borda pour  $m$  options, chaque première place remporte  $(m - 1)$  points. La contribution de ce groupe au score total est donc :  $N_C(m - 1)$  points

**2. Le groupe des non-partisans ( $n - N_C$  votants) :** ce groupe est constitué des électeurs qui ne classent pas  $C$  en première position. En retenant le second rang comme position de référence pour ces votants, le candidat  $C$  reçoit  $(m - 2)$  points par électeur. Ce choix méthodologique permet de définir une borne de « sécurité » : il s'agit du score minimal que  $C$  doit obtenir auprès des non-partisans pour que sa qualité de gagnant de Condorcet (victoire binaire sur tous les autres candidats) reste mathématiquement cohérente face à un adversaire favorisé par la règle de Borda. La contribution minimale de ce second groupe est donc :  $(n - N_C)(m - 2)$ .

En sommant les points issus de ces deux segments de la population électorale, nous obtenons la borne inférieure du score total :

$$B(C) \geq N_C(m - 1) + (n - N_C)(m - 2).$$

### 5.1.3 Proposition 3 : borne supérieure du score de Borda d'un candidat concurrent ( $x$ )

Proposition 3: Soit  $x$  un candidat quelconque différent du gagnant de Condorcet  $C$ . Son score de Borda  $B(x)$  est majoré par le scénario le plus défavorable pour  $C$ , où  $x$  capte la totalité des premières places non attribuées à  $C$  et se positionne au rang le plus élevé possible (2ème) dans les bulletins favorables à  $C$ . La borne supérieure est définie par :

$$B(x) \leq (n - N_C)(m - 1) + N_C(m - 2)$$

#### Démonstration :

Pour établir la rigueur de cette borne, nous cherchons à maximiser mathématiquement le score de  $x$  sous la contrainte des positions déjà occupées par  $C$  dans la Proposition 2 :

1. Maximisation chez les non-partisans de  $C$  ( $n - N_C$  votants) : dans ce groupe, le candidat  $C$  occupe le second rang (selon notre hypothèse de borne minimale pour  $C$ ). Pour maximiser le score de l'opposant  $x$ , nous supposons que  $x$  occupe systématiquement le premier rang dans ce segment de la population. Chaque votant attribue donc  $(m - 1)$  points à  $x$ . leur contribution au score de  $x$  est de :  $(n - N_C)(m - 1)$ .
2. Maximisation chez les partisans de  $C$  ( $N_C$  votants) : Dans ce groupe,  $C$  occupe déjà le premier rang. La position la plus haute restant disponible  $x$  est le second rang. Chaque votant attribue donc  $(m - 2)$  points à  $x$ . Leur contribution au score de  $x$  est de :  $N_C(m - 2)$ .

En sommant ces deux contributions maximales, nous obtenons le score de Borda plafond pour n'importe quel candidat  $x$  concurrent :

$$B(x) \leq (n - N_C)(m - 1) + N_C(m - 2)$$

### 5.1.4. Lien entre l'écart de score et la condition de majorité

Afin d'établir une condition de victoire irréfutable, il convient de démontrer que même dans le scénario le plus défavorable pour le gagnant de Condorcet  $C$  (le "pire cas" défini par les Propositions 2 et 3), la supériorité de son score de Borda est garantie par le soutien majoritaire.

Calcul de l'écart de score ( $D$ ):

Considérons la différence  $D = B(C) - B(x)$  entre la borne minimale du candidat  $C$  et la borne maximale d'un opposant quelconque  $x$ . En substituant les expressions établies précédemment :

$$D = [N_C(m - 1) + (n - N_C)(m - 2)] - [(n - N_C)(m - 1) + N_C(m - 2)]$$

En regroupant les termes par coefficients de pondération :

$$D = (m - 1)[N_C - (n - N_C)] + (m - 2)[(n - N_C) - N_C]$$

En simplifiant les expressions entre crochets on a :

$$D = (m - 1)(2N_C - n) - (m - 2)(2N_C - n)$$

En factorisant par  $(2N_C - n)$  :

$$D = (2N_C - n)[(m - 1) - (m - 2)]$$

$$D = (2N_C - n)$$

Pour que le candidat  $C$  remporte l'élection selon la règle de Borda il faut que  $B(C) > B(x)$ , l'écart  $D$  doit être strictement positif. La condition devient alors :

$$2N_C - n > 0 \Rightarrow N_C > \frac{n}{2} \Rightarrow P > 0,5$$

Ce résultat démontre que si le gagnant de Condorcet bénéficie d'une base minimale de soutien (en l'occurrence, être classé au moins deuxième par l'intégralité des votants ne le plaçant pas en tête), la majorité absolue des premières places ( $P > 0,5$ ) suffit mathématiquement à garantir sa victoire, quel que soit le nombre d'options  $m$ .

## 5.2 Détermination du seuil critique de premières places ( $P$ )

L'objectif de cette section est de déterminer la proportion minimale de premières places, notée  $P$ , garantissant que le gagnant de Condorcet  $C$  remporte systématiquement l'élection face à n'importe quel candidat  $x$  selon la règle de Borda, même dans la configuration de rangs la plus défavorable.

### 5.2.1. Condition d'inversion du paradoxe

D'après les résultats obtenus à la section 5.1.4, nous avons établi que l'écart de score  $D = B(C) - B(X)$  est égal à  $2N_C - n$  dès lors que le candidat  $C$  conserve un rang minimal de second chez les votants ne le plaçant pas en tête. Cependant, pour obtenir une condition générale et absolue qui s'affranchit de toute hypothèse sur le rang de  $C$  chez les

non-partisans (couvrant ainsi le cas où  $C$  pourrait être classé dernier par ses opposants), nous devons confronter le score de  $C$  réduit à ses seuls soutiens de premier rang face au score maximal théorique d'un concurrent  $x$ .

### 5.2.2. Calcul du seuil analytique ( $P$ )

Proposition 4 : pour que le gagnant de Condorcet ( $C$ ), classé premier par une proportion  $P$  de votants, soit garanti de ne pas être l'option la moins bien classée selon la règle de Borda, il faut que :

$$P > \frac{m-1}{m}.$$

#### Démonstration :

Soit  $N_C$  le nombre de votants classant  $C$  premier. Dans le cas extrême où  $C$  ne recevrait aucun point des autres votants ( $n - N_C$ ), son score serait :  $B(C)_{min} = N_C(m - 1)$

À l'inverse, un candidat concurrent  $x$  maximise son score s'il capte toutes les premières places restantes et se place immédiatement derrière  $C$  (rang 2) dans les autres bulletins :

$$B(x)_{max} = (n - N_C)(m - 1) + N_C(m - 2)$$

La victoire de  $C$  est garantie si  $B(C)_{min} > B(x)_{max}$ , soit :

$$N_C(m - 1) > (n - N_C)(m - 1) + N_C(m - 2)$$

En divisant l'ensemble de l'inéquation par  $n$  pour faire apparaître la proportion  $P = \frac{N_C}{n}$  :

$$P(m - 1) > (1 - p)(m - 1) + P(m - 2)$$

$$P(m - 1) > (m - 1) - p(m - 1) + p(m - 2)$$

En regroupant les termes en  $P$  à gauche, on obtient :

$$P(m - 1) + P(m - 1) - P(m - 2) > (m - 1)$$

$$P[2m - 2 - m + 2] > (m - 1)$$

$$P(m) > (m - 1)$$

D'où le seuil critique :  $P > \frac{m-1}{m}$

### 5.2.3 Analyse de la robustesse du seuil

Ce résultat permet de tirer deux conclusions fondamentales répondant aux exigences de rigueur de l'état de l'art. Le seuil analytique  $P > \frac{m-1}{m}$  constitue une convergence vers l'unanimité. Il transforme la question qualitative de l'existence des paradoxes en une condition quantifiable claire qui assure la robustesse de la règle face au principe de majorité. La formule du seuil révèle une implication critique relative à la fragmentation des préférences, c'est-à-dire l'augmentation du nombre d'options  $m$ . Lorsque le nombre d'options ( $m$ ) tend vers l'infini, la valeur du seuil  $\frac{m-1}{m}$  tend asymptotiquement vers 1.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m-1}{m} = 1$$

Cela démontre mathématiquement que plus le nombre d'options ( $m$ ) augmente, plus la proportion de premières places nécessaire pour garantir la victoire du gagnant de Condorcet sous la règle de Borda doit tendre vers l'unanimité. En d'autres termes la règle de Borda exige un niveau de consensus majoritaire quasi-total ( $P \approx 100\%$ ) pour assurer que le gagnant de Condorcet ne soit pas rejeté. Ce résultat confirme la fragilité intrinsèque de la règle de Borda dans les systèmes multipartites.

### 5.3.2 Lien avec la littérature et portée analytique

Notre résultat apporte une contribution aux travaux existants, notamment ceux de Saari. En effet, nous passons de l'observation qu'un paradoxe *peut* exister à la détermination de la condition minimale quantifiée sous laquelle ce paradoxe *ne peut pas* se produire. Aussi, notre formule fournit une frontière analytique claire qui complète les analyses géométriques en définissant la limite de fiabilité de la règle de Borda en fonction du nombre de choix.

### 5.3.3 Perspectives de généralisation

Cette analyse se concentre sur la règle de Borda. Cependant, la méthode utilisée pour dériver le seuil ouvre une perspective de généralisation future à l'ensemble des règles positionnelles (méthodes par pondération des rangs). Il serait pertinent d'explorer dans quelle mesure cette approche pourrait être adaptée afin de dériver des conditions de robustesse similaires pour d'autres règles positionnelles.

## 6. Conclusion

La présente étude avait pour objectif de combler une lacune analytique dans la quantification des paradoxes de la règle de Borda. En nous concentrant sur les profils de préférences qui sanctionnent le Gagnant de Condorcet, nous avons réussi à dériver une condition analytique générale. Le résultat principal,  $P > \frac{m-1}{m}$ , fournit le seuil minimal de suffrages de première place nécessaires pour garantir que le Gagnant de Condorcet ne soit pas l'option la moins bien classée par la règle de Borda. L'analyse de ce seuil a des implications directes : elle confirme que plus le nombre d'options augmente, plus l'exigence de consensus majoritaire est élevée, démontrant ainsi la vulnérabilité croissante de la règle de Borda à la fragmentation des préférences. Cette quantification renforce la compréhension des limites des règles de vote positionnelles et justifie la nécessité de considérer à la fois le critère de Condorcet (volonté majoritaire) et la prise en compte de l'intensité des préférences (Borda). Les recherches futures devraient se concentrer sur l'adaptation de cette méthode de quantification à l'ensemble des règles positionnelles.

## 7. Bibliographie

- Arrow, K. J. (1951). *Social choice and individual values: Vol. 99 pages*. John Wiley & Sons.
- Borda, J. C. (1781). *Mémoires sur les Élections au Scrutin* (Histoire de l'Académie royale des Sciences, Ed.).
- Condorcet, M. de. (1785). *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Elections rendues à la Pluralité des Voix*.
- Gibbard, A. (1973). Manipulation of Voting Schemes: A General Result. *Econometrica*, 41(4), 587.  
<https://doi.org/10.2307/1914083>
- Maskin, E. (2025). Borda's Rule and Arrow's Independence Condition. *Journal of Political Economy*, 133(2), 385–420.  
<https://doi.org/10.1086/732892>
- Saari, D. G. (2001). *Decisions and elections : explaining the unexpected*. New York : Cambridge University Press.
- Saari, D. G. (1995). *Basic Geometry of Voting*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57748-2>

- Satterthwaite, M. A. (1975). Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2), 187–217. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(75\)90050-2](https://doi.org/10.1016/0022-0531(75)90050-2)
- Smith, J. H. (1973). Aggregation of Preferences with Variable Electorate. *Econometrica*, 41(6), 1027. <https://doi.org/10.2307/1914033>
- Young, H. P. (1974). An axiomatization of Borda's rule. *Journal of Economic Theory*, 9(1), 43–52. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(74\)90073-8](https://doi.org/10.1016/0022-0531(74)90073-8)
- Young, H. P. (1975). Social Choice Scoring Functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 28(4), 824–838. <https://doi.org/10.1137/0128067>